Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Eine Zusammenfassung von Bernhard Kabelka
zur Vorlesung von Prof. Havlicek im SS 2001

Version 1.02, 15. März 2004

Es sei ausdrücklich betont, dass

(1) dieses Essay ohne das Wissen und die Mitarbeit von Prof. Havlicek entstanden ist,

(2) trotz großer Anstrengungen seitens des Autors, eine möglichst fehlerfreie und vollständige Zusammenfassung zu liefern, sich Fehler eingeschlichen haben könnten (sollte jemand einen Fehler entdecken, so bittet der Autor um Benachrichtigung, vorzugsweise per eMail an bernhard@kabelka.net),

(3) die Lektüre dieser Zusammenfassung keinesfalls den persönlichen Besuch der Vorlesung bzw. das Studium des Skriptums ersetzen, sondern bestenfalls ergänzen kann.

Die aktuelle Version dieser Datei ist erhältlich unter:
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/algebra/download/linag2.pdf`
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/algebra/download/linag2.ps.gz`

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Selbstabbildungen

1.1 Polynome

Ein **Polynom** kann man als Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ auffassen, bei der fast alle a_i gleich 0 sind. Man schreibt auch

$$P(X) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X + a_0$$
$$\text{mit } a_i \in K \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n\}$$

n heißt dann auch der **Grad** des Polynoms.
Ist $a_n = 1$, so spricht man von einem **normierten Polynom**.

Mit Hilfe des **Einsetzungshomomorphismus**

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{v}}: \quad & K[\mathbf{x}] \to \mathbf{A} & (\mathbf{A} \ \ldots\ldots \text{ assoziative } K\text{-Algebra}) \\ & \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot X^i \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot \mathbf{v}^i \end{aligned}$$

kann man auch eine **Polynomfunktion** definieren als

$$\begin{aligned} p: \quad & K \to K \\ & x \mapsto P(x) \end{aligned}$$

So kann man auch eine **Nullstelle** t beschreiben: $P(t) = 0$.

Der **Divisionsalgorithmus** besagt, dass zu zwei Polynomen $P(X)$ und $Q(X)$ zwei eindeutig bestimmte Polynome $S(X)$ und $R(X)$ gibt, so dass gilt:

$$P(X) = Q(X) \cdot S(X) + R(X) \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} & R(X) = 0 \quad \text{oder} \\ & \mathrm{grad}(R(X)) < \mathrm{grad}(Q(X)) \end{aligned}$$

Ist $R(X) = 0$, so sagt man, $P(X)$ sei ein **Vielfaches** von $Q(X)$, das wiederum ein **Teiler** von $R(X)$ ist.

Existiert keine andere Zerlegung außer der trivialen (d. h. $S(X) \in K$ oder $Q(X) \in K$), dann ist $P(X)$ ein **irreduzibles Polynom**.

Es gilt: $t \in K$ ist Nullstelle von $P(X) \iff (X - t)$ ist Teiler von $P(X)$

Unter der **Vielfachheit** einer Nullstelle verstehen wir die größte natürliche Zahl m mit der Eigenschaft, dass $(X - t)^m$ ein Teiler von $P(X)$ ist.

Jedes Polynom hat höchstens so viele Nullstellen (jeweils mit ihrer Vielfachheit gezählt), wie sein Grad angibt.

Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{C}^X$ in Linearfaktoren zerfällt.

1.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein Skalar $t \in K$ heißt **Eigenwert** von $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, wenn gilt:

$$\exists\, \mathbf{a} \in \mathbf{V} \backslash \{\mathbf{0}\}: \quad f(\mathbf{a}) = t \cdot \mathbf{a}$$

Ein solcher Vektor **a** heißt **Eigenvektor** von $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, und es gilt:

$$\mathbf{a} \in \ker(f - t \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) \qquad (\textbf{Eigenraum})$$

Das **charakteristische Polynom** ist erklärt durch $\chi_A(X) := \det(A - X \cdot E_n)$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind genau die Eigenwerte der Matrix A.

Eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ heißt **ähnlich** zur Matrix $B \in K^{n \times m}$, wenn gilt:

$$\exists\, P \in GL(n, K): \quad B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Da ein $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ bezüglich verschiedener Basen durch ähnliche Matrizen beschrieben wird, ist folgende Definition sinnvoll:

$$\chi_f(X) := \chi_{\Phi_{BB}(f)}(X) \qquad\qquad (\mathbf{B} \ldots\ldots \text{Basis von } \mathbf{V})$$

Man bezeichnet schließlich die Vielfachheit von t als Nullstelle im charakteristischen Polynom als **algebraische Vielfachheit** und die Dimension des Eigenraumes als **geometrische Vielfachheit**. Die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit (auch echt kleiner möglich!).

2 Jordan-Normalformen

Besitzt **V** eine Basis aus Eigenvektoren von $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, so heißt f **einfach strukturiert**. Das ist genau dann der Fall, wenn $\Phi_{BB}(f)$ ähnlich einer Diagonalmatrix, d. h. **diagonalisierbar**, ist.

Zerfällt das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren, so kann A triangularisiert werden, d. h. A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. Sind zusätzlich die Nullstellen verschieden, so kann A sogar diagonalisiert werden.

Man definiert: $P(X)$ heißt **Annullatorpolynom** von $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, wenn gilt: $P(f) = 0$. Das **Minimalpolynom** $\mu_f(X)$ ist jenes normierte Annullatorpolynom, das den kleinsten Grad besitzt. Die Annullatorpolynome sind dann genau die Vielfachen von $\mu_f(X)$.

Der **Satz von Cayley-Hamilton** besagt, dass das charakteristische Polynom $\chi_f(X)$ ein Annullatorpolynom ist. Damit ist das Minimalpolynom $\mu_f(X)$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_f(X)$.

Ein Unterraum **U** heißt ***f*-invariant**, wenn gilt: $f(U) \subseteq U$.

Man definiert: $\mathbf{d} \in \mathbf{V}$ heißt **Hauptvektor** von f zum Eigenwert $t \in K$, wenn es ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mathbf{d} \in \ker(f - t \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}})^i$. Das kleinste i mit dieser Eigenschaft heißt **Stufe** von **d**. Die Menge aller Hauptvektoren von f zum Eigenwert $t \in K$ heißt **Hauptraum** $\mathbf{V}_f(t) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \ker(f - t \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}})^i$.

Ist eine Menge von k verschiedenen Hauptvektoren $\mathbf{d}_j$ mit Stufe m_j und die „zugehörigen" Eigenvektoren $\ker(f-t\cdot\mathrm{id}_{\mathbf{V}})^{m_j-1}(\mathbf{d}_j)$, die alle voneinander verschieden sind und eine linear unabhängige Menge bilden, gegeben, so sind auch alle Hauptvektoren „dazwischen" voneinander verschieden und linear unabhängig.

Man definiert ein **Jordan-Kästchen** als

$$J_m(t) := \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix}$$

Sei $f \in L(\mathbf{V},\mathbf{V})$ mit $\chi_f(X) = (-1)^n \cdot (X-t)^n$. Dann gibt es eine geordnete Basis **B**, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{BB}}(f) &= \mathrm{diag}\,(A_1, \ldots, A_p) \qquad \text{mit} \\ A_j &= \mathrm{diag}\,(J_{m_j}(t), \ldots, J_{m_j}(t)) \end{aligned}$$

wobei die Gesamtanzahl der Jordan-Kästchen genau der geometrischen Vielfachheit von t entspricht.

Sei $f \in L(\mathbf{V},\mathbf{V})$ mit $\chi_f(X) = (-1)^n \cdot (X-t_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X-t_r)^{n_r}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{V}_f(t_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{V}_f(t_r) \qquad & \text{mit } \dim \mathbf{V}_f(t_i) = n_i \\ \Phi_{\mathbf{BB}}(f) = \mathrm{diag}\,(C_1, \ldots, C_r) \qquad & \text{mit } C_i = \mathrm{diag}\,(A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}) \\ & \text{mit } A_{i_j} = \mathrm{diag}\,(J_{m_j}(t_i), \ldots, J_{m_j}(t_i)) \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Jordan-Kästchen eindeutig und wird **Jordan-Normalform** genannt.

Zwei Abbildungen f_1 und f_2 ($f_1, f_2 \in L(\mathbf{V},\mathbf{V})$) heißen **konjugiert**, wenn es ein $g \in GL(\mathbf{V})$ gibt mit: $f_2 = g^{-1} \circ f_1 \circ g$. Das ist genau dann der Fall, wenn A_{f_1} und A_{f_2} ähnlich zu derselben Matrix in Jordan-Normalform sind.

Man kann die **komplexe Erweiterung** eines Vektorraumes **V** (über $\mathbb{R}$) wie folgt definieren:

$$\mathbf{V}_{\mathbb{C}} := \mathbf{V} \times \mathbf{V} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a}',\mathbf{b}') &= (\mathbf{a}+\mathbf{a}', \mathbf{b}+\mathbf{b}') \\ (x,y)\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= (x\cdot\mathbf{a} - y\cdot\mathbf{b}, x\cdot\mathbf{b} + y\cdot\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Die Eigenschaft einer Teilmenge $M \subseteq \mathbf{V}$ linear (un)abhängig oder Erzeugendensystem von **V** zu sein, bleibt auch in $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ erhalten.

Ein $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ lässt sich dann eindeutig zu einem $f_{\mathbb{C}} \in L(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}, \mathbf{V}_{\mathbb{C}})$ bzw. zu einem semilinearen $\overline{f_{\mathbb{C}}}$ erweitern:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(\mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b}) &:= f(\mathbf{a}) + i \cdot f(\mathbf{b}) \\ \overline{f_{\mathbb{C}}}(\mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b}) &:= f(\mathbf{a}) - i \cdot f(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Schließlich definiert man noch den Begriff des **reellen Unterraums**: $\mathbf{T}$ ist genau dann reeller Unterraum, wenn gilt: $\exists\, \mathbf{U} \subseteq \mathbf{V} : \mathbf{T} = \mathbf{U}_{\mathbb{C}}$. Dazu ist äquivalent: $\mathbf{T} = \overline{\mathbf{T}}$.

Mit Hilfe des „Umweges“ über $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ erhält mann, da gilt:

(1) $\chi_f(X) = \chi_{f_{\mathbb{C}}}(X)$

(2) $t \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von $f \quad \Rightarrow \quad t$ ist Eigenwert von $f_{\mathbb{C}}$

(3) $t \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von $f_{\mathbb{C}} \quad \Rightarrow \quad \bar{t}$ ist Eigenwert von $f_{\mathbb{C}}$

und mit Hilfe der Basistransformation von

$$\mathbf{T}(u) = [\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m\}] \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{\mathbf{T}(u)} = [\{\bar{\mathbf{c}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{c}}_m\}]$$

zu

$$\mathbf{T}(u) \oplus \overline{\mathbf{T}(u)} = \Big[\{i \cdot (\bar{\mathbf{c}}_1 - \mathbf{c}_1), \ldots, i \cdot (\bar{\mathbf{c}}_m - \mathbf{c}_m), (\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{c}}_1), \ldots, (\mathbf{c}_m + \bar{\mathbf{c}}_m)\}\Big]$$

ein **reelles Jordan-Kästchen**:

$$J_m(u, \bar{u}) = \begin{pmatrix} J_m(a) & -b \cdot E_m \\ b \cdot E_m & J_m(a) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } u = a + i \cdot b$$

So erhält man schließlich für alle $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ die Zerlegung:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_f(t_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{V}_f(t_r) \oplus \mathbf{V}_f(u_1, \bar{u}_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{V}_f(u_s, \bar{u}_s)$$

sowie

$$\Phi_{\mathbf{BB}}(f) = \operatorname{diag}(C_1, \ldots, C_r, D_1, \ldots, D_s) \qquad \begin{aligned} &\text{mit } C_i = \operatorname{diag}(J_*(t_i)) \\ &\text{und } D_i = \operatorname{diag}(J_*(u_i, \bar{u}_i)) \end{aligned}$$

als – bis auf die Reihenfolge – eindeutige **reelle Jordan-Normalform**. Diese ermöglicht eine Klassifizierung aller $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$.

3 Sesquilinearformen

Eine Abbildung $\sigma : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to K$ heißt **ζ-Sesquilinearform** ($\zeta \in \mathrm{Aut}(K)$), wenn gilt:

(1) $\sigma(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sigma(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \sigma(\mathbf{b},\mathbf{c}) \qquad \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V$

(2) $\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \sigma(\mathbf{a},\mathbf{c}) \qquad \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V$

(3) $\sigma(x \cdot \mathbf{a},\mathbf{b}) = x \cdot \sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b} \in V,\ \forall\, x \in K$

(4) $\sigma(\mathbf{a}, x \cdot \mathbf{b}) = \zeta(x) \cdot \sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b} \in V,\ \forall\, x \in K$

Bei $\zeta = \mathrm{id}_K$ spricht man auch von einer **Bilinearform**.

Es gilt: ζ-Sesquilinearform $\sigma \iff \zeta$-semilineare Abbildung $d : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$

$$\begin{array}{ccc} \Updownarrow & & \Updownarrow \\ d_\sigma : \begin{array}{l} \mathbf{V} \to \mathbf{V}^* \\ \mathbf{b} \mapsto \sigma(.,\mathbf{b}) \end{array} & & \sigma_d : \begin{array}{l} \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to K \\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto \langle d(\mathbf{b}),\mathbf{a} \rangle \end{array} \end{array}$$

Eine Sesquilinearform σ heißt **nicht ausgeartet**, wenn gilt:

(1) $\mathbf{a} \in \mathbf{V} : \quad \sigma(\mathbf{a},\mathbf{y}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(2) $\mathbf{b} \in \mathbf{V} : \quad \sigma(\mathbf{x},\mathbf{b}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Die Unterräume $\bigcap_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}} \ker d_\sigma(\mathbf{y})$ und $\ker d_\sigma$ heißen **Ausartungsräume**.

Man nennt zwei Sesquilinearformen σ_1 und σ_2 **kongruent**, wenn es ein $f \in L(\mathbf{V},\mathbf{V})$ gibt mit $\sigma_2 = \sigma_1 \circ (f,f)$.

Bei endlicher Dimension von $\mathbf{V}$ gibt es auch eine **Koordinatendarstellung** von σ. Die **Koordinatenmatrix** hat dann die Form

$$\Phi_{\mathbf{B}}(\sigma) = (g_{ij}) \in K^{n \times n} \qquad \text{mit } g_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$$

Es gilt: $\Phi_{\mathbf{B}}(\sigma) = \Phi_{\mathbf{B}\mathbf{B}^*}(d_\sigma)$.

Bei einem Basiswechsel geht $\Phi_{\mathbf{B}}(\sigma)$ in eine **ζ-kongruente Matrix** $\Phi_{\widetilde{\mathbf{B}}}(\sigma)$ über:

$$\Phi_{\widetilde{\mathbf{B}}}(\sigma) = P^T \cdot \Phi_{\mathbf{B}}(\sigma) \cdot \zeta(P)$$

Man nennt zwei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ **orthogonal** bezüglich σ (in Zeichen: $\mathbf{a} \perp_\sigma \mathbf{b}$), wenn gilt: $\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.
Ist $\perp_\sigma$ eine symmetrische Relation, so ist σ **orthosymmetrisch**.

Man erklärt die **adjungierte Sesquilinearform** zu σ als:

$$\hat{\sigma} : \quad \begin{array}{l} \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to K \\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto \zeta^{-1}(\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})) \end{array}$$

Ab sofort stehe ω abkürzend für einen Körperautomorphismus mit $\omega^2 = id_K$.

Eine Sesquilinearform mit $\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \omega(\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a}))\ \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ wird **$\boldsymbol{\omega}$-symmetrisch** genannt, und ihre Koordinatenmatrix ist eine ω-symmetrische Matrix (d. h. sie erfüllt $G^T = \omega(G)$).

Eine Sesquilinearform mit $\sigma(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0\ \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V}$ (und damit $\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})$) heißt **alternierend**, Ihre Koordinatenmatrix ist eine alternierende Matrix (d. h. sie erfüllt $G^T = -G$). Jede alternierende Sesquilinearform ist eine Bilinearform.

Eine Sesquilinearform mit $\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\omega(\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a}))\ \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ wird **$\boldsymbol{\omega}$-schiefsymmetrisch** genannt, und ihre Koordinatenmatrix ist eine ω-schiefsymmetrische Matrix (d. h. sie erfüllt $G^T = -\omega(G)$).

3.1 Orthogonalräume

Für eine Teilmenge $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ nennt man $\mathbf{M}^\perp := \{\mathbf{y} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{y} \perp \mathbf{m}\ \forall\, \mathbf{m} \in \mathbf{M}\}$ den **Orthogonalraum** von $\mathbf{M}$. Insbesondere heißt $\mathbf{V}^\perp$ der **Radikalraum** (oder kurz das Radikal) von $\mathbf{V}$.

Es gilt:

(1) $\mathbf{M}^\perp = d_\sigma^{-1}(\mathbf{M}^\circ)$

(2) $\mathbf{M}^\perp = \bigcap_{\mathbf{m}\in\mathbf{M}} \ker d_\sigma(\mathbf{m})$

(3) $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}^{\perp\perp}$ (Gleichheit bei $\dim \mathbf{V} < \infty$ *und* $\mathbf{V}^\perp = \{\mathbf{0}\}$)

(4) $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2 \subseteq \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad {\mathbf{M}_1}^\perp \supseteq {\mathbf{M}_2}^\perp \supseteq \mathbf{V}^\perp$

(5) $\left(\sum_{i\in I} \mathbf{U}_i\right)^\perp = \bigcup_{i\in I} {\mathbf{U}_i}^\perp$

(6) $\left(\bigcup_{i\in I} \mathbf{U}_i\right)^\perp \supseteq \sum_{i\in I} {\mathbf{U}_i}^\perp$ (Gleichheit bei $\dim \mathbf{V} < \infty$ *und* $\mathbf{V}^\perp = \{\mathbf{0}\}$)

(7) $\mathbf{M}^\perp = [\mathbf{M}]^\perp$

Bei endlicher Dimension von $\mathbf{V}$ gilt außerdem:

(1) $\mathbf{M}^\perp = (d_\sigma(\mathbf{M}))^\circ$

(2) $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{U}^\perp = n + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}^\perp)$

3.2 Quadratische Formen

Man nennt eine Abbildung $q : \mathbf{V} \to K$ eine **quadratische Form**, wenn gilt:

(1) $q(x \cdot \mathbf{a}) = x^2 \cdot q(\mathbf{a}) \qquad \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V} \quad \forall\, x \in K$

(2) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto q(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - q(\mathbf{a}) - q(\mathbf{b})$ ist eine Bilinearform

$$\begin{array}{lccc}
\text{Es gilt:} & \text{quadratische Form } q & \Longleftrightarrow & \text{symmetrische Bilinearform } \sigma \\
{\scriptstyle (\text{für } \mathrm{char} K \neq 2)} & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
& \begin{array}{rl} \sigma_q : & \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to K \\ & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \frac{q(\mathbf{a}+\mathbf{b})-q(\mathbf{a})-q(\mathbf{b})}{2} \end{array} & & \begin{array}{rl} q : & \mathbf{V} \to K \\ & \mathbf{a} \mapsto \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \end{array}
\end{array}$$

σ_q wird **Polarform** von q genannt.

Rang, Defekt, Koordinatenmatrix, etc. von q wir daher als Rang, Defekt, Koordinatenmatrix, etc. ihrer Polarform erklärt.

3.3 Komplexe Fortsetzung

Genauso wie lineare Abbildungen lassen sich auch Bilinearformen **komplex fortsetzen**.

Man definiert:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbb{C}}(\mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a}' + i \cdot \mathbf{b}') &:= \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{a}') - \sigma(\mathbf{b}, \mathbf{b}') + i \cdot \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + i \cdot \sigma(\mathbf{b}, \mathbf{a}') \\
\overline{\sigma_{\mathbb{C}}}(\mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a}' + i \cdot \mathbf{b}') &:= \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{a}') + \sigma(\mathbf{b}, \mathbf{b}') - i \cdot \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + i \cdot \sigma(\mathbf{b}, \mathbf{a}')
\end{aligned}$$

Identifiziert man eine quadratische Form mit ihrer Polarform vermöge $q(\mathbf{a}) = \sigma_q(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, so kann man auch die komplexe Fortsetzung $q_{\mathbb{C}}$ von quadratischen Formen erklären.

4 Struktursätze für orthosymmetrische Sesquilinearformen

Ist σ eine alternierende Bilinearform, so ist ihre Koordinatenmatrix ζ-kongruent zu einer Matrix

$$\Phi_{\mathbf{B}}(\sigma) = \operatorname{diag}(\square, \ldots, \square, 0, \ldots, 0) \qquad \text{mit } \square = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{und } \sharp\, \square = \frac{\operatorname{rg} \sigma}{2}$$

Eine derartige Koordinatenmatrix nennt man **Normalform** von σ. $\mathbf{V}$ lässt sich dann schreiben als

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}_1 \textcircled{\scriptsize $\perp$} \ldots \textcircled{\scriptsize $\perp$} \mathbf{L}_s \textcircled{\scriptsize $\perp$} \mathbf{V}^{\perp} \qquad \begin{array}{l} \text{mit } \dim \mathbf{L}_i = 2 \\ \text{und } \sigma|_{\mathbf{L}_i \times \mathbf{L}_i} \text{ nicht ausgeartet} \end{array}$$

Zwei alternierende Bilinearformen sind daher genau kongruent, wenn sie denselben Rang besitzen.

Ist σ eine nicht alternierende, ω-symmetrische Sesquilinearform, so ist ihre Koordinatenmatrix ω-kongruent zu einer Matrix der Form

$$\Phi_{\mathbf{B}}(\sigma) = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_r, 0, \ldots, 0)$$

Auch hier spricht man von einer **Normalform** von σ. $\mathbf{V}$ lässt sich dann schreiben als

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{A}_r \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{V}^\perp \qquad \text{mit } \dim \mathbf{A}_i = 1 \text{ und } \sigma|_{\mathbf{A}_i \times \mathbf{A}_i} \text{ nicht ausgeartet}$$

Ist $K = \mathbb{C}$ und $\omega = \mathrm{id}_\mathbb{C}$, dann gibt es $\dim \mathbf{V} + 1$ Typen von ω-symmetrischen Sesquilinearformen (entsprechend ihres Ranges).

Liegt eine symmetrische Bilinearform über $\mathbb{R}$ oder eine **hermitesche Sesquilinearform** (d. h. eine Sesquilinearform mit $K = \mathbb{C}$ und $\omega = {}^-$) vor, so hat die Koordinatenmatrix für eine passende Basis die Form

$$\Phi_\mathbf{B}(\sigma) = \mathrm{diag}\,(E_p,\, -E_{r-p},\, 0)$$

und $\mathbf{V}$ die Zerlegung

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^+ \oplus \mathbf{U}^- \oplus \mathbf{V}^\perp \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{U}^+ \backslash \{\mathbf{0}\} :\ \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0 \\ \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{U}^- \backslash \{\mathbf{0}\} :\ \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{a}) < 0 \end{array}$$

Man setzt fest: Die **Signatur** von σ ist das Tripel $(\dim \mathbf{U}^+,\, \dim \mathbf{U}^-,\, \dim \mathbf{V}^\perp)$, da gilt: $\dim \mathbf{U}^+ = \dim \widetilde{\mathbf{U}}^+$ für eine andere Zerlegung.

Zwei Bilinearformen σ_1 und σ_2 sind genau dann kongruent, wenn sie dieselbe Signatur besitzen.

Für eine quadratische Form q (und damit auch für die zugehörige symmetrische Bilinearform) definiert man die **Definitheit** wie folgt:

Bezeichnung	**Definition**	**Signatur**
positiv definit	$q(\mathbf{a}) > 0 \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V} \backslash \{\mathbf{0}\}$	$(n,\, 0,\, 0)$
negativ definit	$q(\mathbf{a}) < 0 \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V} \backslash \{\mathbf{0}\}$	$(0,\, n,\, 0)$
positiv semidefinit	$q(\mathbf{a}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V}$	$(r,\, 0,\, n-r)$
negativ semidefinit	$q(\mathbf{a}) \leq 0 \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V}$	$(0,\, r,\, n-r)$
indefinit	$\exists\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V} :\ {\scriptstyle q(\mathbf{a})>0 \atop q(\mathbf{b})<0}$	$(p,\, r-p,\, n-r)$ $p > 1,\ r > p$

Definiert man für $\Phi_\mathbf{B}(q) = (g_{ij}) \in K^{n \times n}$ den k-ten **Hauptminor** als

$$G_{(1,\dots,k)} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

so gilt:

$$\begin{array}{lll} q \text{ positiv definit} & \Longleftrightarrow & \det G_{(1,\dots,i)} > 0 \quad \forall\, i \in \{1,\, \dots,\, n\} \\ q \text{ negativ definit} & \Longleftrightarrow & \det G_{(1,\dots,2i-1)} < 0\ \wedge \\ & & \det G_{(1,\dots,2i)} > 0 \quad \forall\, i \in \left\{1,\, \dots,\, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\} \end{array}$$

5 Quadriken

Die Abbildung $\perp\colon \mathcal{P}(\mathbf{U}) \to \mathcal{P}(\mathbf{U}^\perp) =: \mathcal{P}(\mathbf{U})^\perp$ heißt **polare Abbildung**, wenn σ nicht ausgeartet ist auch **Polarität**.

Die Funktion

$$\begin{aligned} \lambda: \quad & \mathcal{A} \to K \\ & \mathbf{a} \mapsto q(\mathbf{a}-\mathbf{t}) + 2 \cdot \langle \mathbf{l}^*, \mathbf{a}-\mathbf{t} \rangle + g \end{aligned}$$

heißt **quadratische Funktion**, wenn $q : \mathbf{X} \to K$ eine quadratische Form, $\mathbf{l}^* \in \mathbf{X}^*$ und $g \in K$ ist.

Zu jeder quadratischen Funktion existiert genau eine quadratische Form $q : K \times \mathbf{X} \to K$ mit $q(1, \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a}) \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{H}$:

$$q(x, \mathbf{a}) = q_\lambda(\mathbf{a} - x \cdot \mathbf{t}) + 2x \cdot \langle \mathbf{l}^*, \mathbf{a} - \mathbf{t} \rangle + g \cot x^2$$

Eine quadratische Funktion besitzt (bezüglich eines passenden affinen Koordinatensystems) immer eine der folgenden **Koordinatendarstellungen**:

(A0) $(x_1 \ \cdots \ x_n)^T \mapsto g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_r \cdot x_r^2 \qquad (r \leq n)$

(A1) $(x_1 \ \cdots \ x_n)^T \mapsto g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_r \cdot x_r^2 + g \qquad (r \leq n)$

(B) $(x_1 \ \cdots \ x_n)^T \mapsto g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_r \cdot x_r^2 - 2 \cdot x_n \qquad (r < n)$

Die Punktmenge $\mathcal{Q}_{\mathit{aff}} := \{\mathbf{a} \in \mathcal{A} \mid \lambda(\mathbf{a}) = 0\}$ heißt **affine Quadrik**.
Die Menge $\mathcal{Q} := \{K \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathbf{V}) \mid q(\mathbf{a}) = 0\}$ heißt dann **projektive Quadrik**.

Eine Gerade g von $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ heißt **Tangente** einer projektiven Quadrik, wenn sie mit $\mathcal{Q}$ genau einen Punkt gemeinsam hat oder ganz in $\mathcal{Q}$ enthalten ist.
Eine Gerade ist genau dann Tangente an $\mathcal{Q}$ in P, wenn sie im Unterraum $\mathcal{T}_p\, \mathcal{Q} := P^\perp$ liegt.

Für jede Gerade g von $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ gilt: $\sharp\,(g \cap \mathcal{Q}) \leq 2$ oder $g \subseteq \mathcal{Q}$.

Ein Punkt $S \in \mathcal{Q}$ heißt **singulär**, wenn jede Gerade durch S Tangente an $\mathcal{Q}$ ist, sonst **regulär**.
Die Menge aller singulären Punkte heißt **Spitzenraum** und ist genau das Radikal der zu q gehörigen symmetrischen Bilinearform.

Für einen regulären Punkt $P \in \mathcal{Q}$ heißt $\mathcal{T}_p\, \mathcal{Q}$ die **Tangentialhyperebene**.

Besitzt eine Quadrik zumindest einen singulären Punkt, so wird sie **singulär** genannt, andernfalls ist sie **regulär**.

Eine projektive Quadrik, die zumindest einen regulären Punkt besitzt, spannt den gesamten Raum $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ auf.

Eine **Asymptote** von $\mathcal{Q}_{\mathit{aff}}$ liegt dann vor, wenn die projektive Entsprechung Tangente an $\mathcal{Q}$ ist, aber gilt: $g_{\mathit{aff}} \cap \mathcal{Q}_{\mathit{aff}} = \emptyset$ (analog für eine asymptotische Hyperebene).

Eine singuläre affine Quadrik heißt **Zylinder**, falls der Spitzenraum in der Fernhyperebene liegt.
Eine affine Quadrik heißt **parabolisch**, wenn die Fernhyperebene Tangentialhyperebene von $\mathcal{Q}$ ist.

Für die drei Typen von Quadriken gilt:

(A0) ist Kegel, nicht parabolisch

(A1) ist Zylinder oder regulär, nicht parabolisch

(B) ist Zylinder oder regulär, parabolisch

Es gibt eine **Projektivspiegelung** $\kappa : \mathcal{P}(\mathbf{V}) \to \mathcal{P}(\mathbf{V})$ mit Zentrum P und der Eigenschaft $\kappa(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$. Diese ist eindeutig bestimmt, wenn $\mathcal{Q}$ zumindest eine regulären Punkt besitzt:

$$\kappa := \mathcal{P}(f) \qquad \text{mit} \quad f : \quad \begin{aligned} &\mathbf{V} \to \mathbf{V} \\ &\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a} - 2 \cdot \frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a})}{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p})} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

Ein Punkt $\mathbf{m} \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{Q}_{\mathit{aff}}$ heißt **Mittelpunkt** und $\mathcal{Q}_{\mathit{aff}}$ eine **Mittelpunktsquadrik**, wenn $\mathbf{m}^\perp$ die Fernhyperebene ist.
$\mathcal{D}_{\mathit{aff}}$ heißt **Durchmesserhyperebene**, wenn es einen Fernpunkt P gibt mit $P^\perp = \mathcal{D}$.

$\mathcal{Q}_{\mathit{aff}}$ ist genau dann eine Mittelpunktsquadrik, wenn sie vom Typ (A1) ist.

Es sei $\mathcal{Q}(q_1) = \mathcal{Q}(q_2)$ eine projektive Quadrik mit zumindest einem regulären Punkt. Dann gilt: $\exists\, c \in K^\times : \ c \cdot q_1 = q_2$.

Durch einfache Umformungen erhält man eine Aussage über Unterräume $\mathbf{U}$, die ganz auf der Quadrik liegen: Besitzt q die Signatur $(p, r-p, n-r)$, dann gilt: $\dim \mathbf{U} \leq n - p$.

Quadriken vom Typ $(+++-)$ heißen **ovale Quadriken** und gliedern sich affin in:

(1) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ (**zweischaliges Hyperboloid**)

(2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (**Ellipsoid**)

(3) $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$ (**elliptisches Paraboloid**)

Quadriken vom Typ $(++--)$ heißen **ringartige Quadriken** und gliedern sich affin in:

(1) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ (**einschaliges Hyperboloid**)

(2) $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$ (**hyperbolisches Paraboloid**)

6 Vektorräume mit Skalarprodukt

Sei $\iota : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to K$ eine nicht ausgeartete, ω-symmetrische oder alternierende Sesquilinearform. Dann heißt ι ein **Skalarprodukt**. Ist ι ω-symmetrisch, so nennt man $\mathbf{V}$ einen **$\boldsymbol{\omega}$-symmetrischen Vektorraum**. Ist ι alternierend, so liegt ein **symplektischer Vektorraum** vor.

Man nennt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \in K$ das **Längenquadrat** des Vektors $\mathbf{a}$. Ist $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = 1$, so nennt man $\mathbf{a}$ **normiert**; ist $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = 0$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$), so nennt man $\mathbf{a}$ **isotrop**. In einem **anisotropen Unterraum** $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ gibt es keine isotropen Vektoren.

Ein symmetrischer Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ heißt **pseudoeuklidisch**. Einen reellen Vektorraum mit einem positiv definiten symmetrischen Skalarprodukt nennt man **euklidisch**, einen komplexen Vektorraum mit einem positiv definiten hermiteschen Skalarprodukt **unitär**. Ein euklidischer oder unitärer Vektorraum wird auch **Prähilbertraum** genannt.

In einem euklidischen oder unitären Vektorraum kann man die **Länge** definieren als

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} \geq 0$$

Ebendort gilt die **Cauchy-Schwarz-Buniakowski-Ungleichung**:

$$|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V} \qquad \text{mit Gleichheit für } \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \text{ l.a.}$$

Weiters gilt $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ und $\forall\, x \in K$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| &\leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| && (\textbf{Dreiecksungleichung}) \\ \|x \cdot \mathbf{a}\| &= |x| \cdot \|\mathbf{a}\| && (\textbf{Streckungseigenschaft}) \end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Schwarz-Buniakowski-Ungleichung gilt

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \leq 1$$

und man kann daher das **Winkelmaß** zweier Vektoren wie folgt definieren:

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \arccos \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$$

Wird $\mathbf{V}$ mit Hilfe einer Determinantenform $\triangle$ orientiert, so ist das **orientierte Winkelmaß**

$$\vec{\angle}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} -\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{wenn } \triangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 0 \\ \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Schließlich führt man für eine Abbildung $\|.\| : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ mit

(1) $\mathbf{a} \in \mathbf{V} : \ \|\mathbf{a}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(2) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$

(3) $\|x \cdot \mathbf{a}\| = |x| \cdot \|\mathbf{a}\| \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V},\ \ \forall\, x \in K$

den Begriff **Norm** ein. Die Längenfunktion ist eine solche Norm.

Ein Unterraum $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ heißt **isotrop**, falls $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp} \neq \emptyset$, und **vollisotrop**, falls $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}^{\perp}$. Für einen vollisotropen Unterraum $\mathbf{U}$ gilt: $\dim \mathbf{U} \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.
Wenn gilt $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^{\perp}$, so nennt man $\mathbf{U}^{\perp}$ das **orthogonale Komplement** von $\mathbf{U}$.

Ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ heißt **Gradient** der Linearform $\mathbf{a}^* \in \mathbf{V}^*$, falls gilt:

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{a} = \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{x} \rangle \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

Ein Gradient existiert genau dann, wenn $\mathbf{a}^* \in d_\iota(\mathbf{V})$.

Eine Basis $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_j \mid j \in I)$ ist die zu $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_j \mid j \in I)$ **reziproke Basis**, wenn gilt: $\mathbf{b}_i \bullet \mathbf{c}_j = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in I$.
Es existiert höchstens eine solche Basis, und zwar genau dann, wenn $(\mathbf{b}_j^*)_{j \in I}$ nummerierte Basis von $d_\iota(\mathbf{V}) \subseteq \mathbf{V}^*$ ist. Man bezeichnet sie üblicherweise mit $\widehat{\mathbf{B}} = (\widehat{\mathbf{b}}_j)_{j \in I}$.
Es ist dann $\widehat{\mathbf{b}}_j$ ein Gradientenvektor von $\mathbf{b}_j^*$.

Die Koordinaten von $\mathbf{x}$ bezüglich $\mathbf{B}$ bezeichnet man auch als **kontravariante Koordinaten** bezüglich $\mathbf{B}$, die Koordinaten bezüglich $\widehat{\mathbf{B}}$ als **kovariante Koordinaten** bezüglich $\mathbf{B}$.

Hat $\mathbf{a} \in \mathbf{V} \backslash \{\mathbf{0}\}$ die Koordinaten $\Phi_{\widehat{\mathbf{B}}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 & \cdots & \widehat{a}_n \end{pmatrix}^T$, so ist die Gleichung von $\mathbf{a}^{\perp}$ (bezüglich $\mathbf{B}$!):

$$x_1 \cdot \omega(\widehat{a}_1) + \ldots + x_n \cdot \omega(\widehat{a}_n) = 0$$

In einem ω-symmetrischen Vektorraum bezeichnet man eine Teilmenge $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ als

- **Orthogonalsystem**, wenn gilt:

$$\mathbf{s} \bullet \mathbf{s} \neq 0 \quad \forall\, \mathbf{s} \in \mathbf{S} \qquad \wedge \qquad \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbf{S}$$

- **Orthonormalsystem**, wenn gilt:

$$\mathbf{S} \text{ ist Orthogonalsystem} \qquad \wedge \qquad \mathbf{s} \bullet \mathbf{s} = 1 \quad \forall\, \mathbf{s} \in \mathbf{S}$$

Eine Basis $\mathbf{B}$ nennt man dann auch

- **Orthogonalbasis**, wenn sie ein Orthogonalsystem ist.

- **Orthonormalbasis**, wenn sie ein Orthonormalsystem ist.

Jedes Orthogonalsystem von $(\mathbf{V}, \iota)$ ist linear unabhängig.

In einem ω-symmetrischen anisotropen Vektorraum mit einer höchstens abzählbaren Basis kann jedes endliche Orthogonalsystem zu einer Orthogonalbasis erweitert werden.

In einem ebensolchen Vektorraum liefert das **Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt** aus einer Basis $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_i)_{i \in I}$ eine Orthogonalbasis $(\mathbf{a}_i)_{i \in I}$ mit $[\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k] = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k] \quad \forall k \in I$ durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &:= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{k+1} &:= \mathbf{b}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathbf{b}_{k+1} \bullet \mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_j \bullet \mathbf{a}_j} \cdot \mathbf{a}_j \end{aligned}$$

7 Adjungierte Abbildungen

Ein Abbildung $g \in L(\mathbf{W}, \mathbf{V})$ heißt **adjungierte Abbildung** zu $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, wenn gilt:

$$f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet g(\mathbf{b}) \qquad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{W}$$

Es gibt höchstens eine solche Abbildung, und sie existiert genau dann, wenn gilt: $\left(f^T \circ d_{\mathbf{W}}\right)(\mathbf{W}) \subseteq d_{\mathbf{V}}(\mathbf{V})$.
Bei $\dim \mathbf{V} < \infty$ hat $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ die adjungierte Abbildung $\widehat{f} := d_{\mathbf{V}}^{-1} \circ f^T \circ d_{\mathbf{W}}$.

Es gilt:

(1) $\widehat{f_1 + f_2} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$

(2) $\widehat{y \cdot f} = \omega(y) \cdot \widehat{f}$

(3) $\widehat{f_1 \circ f_2} = \widehat{f_2} \circ \widehat{f_1}$

(4) $f(\mathbf{V})^{\perp} = \ker \widehat{f}$

(5) f surjektiv $\quad \Rightarrow \quad \widehat{f}$ injektiv

(6) $\widehat{f}$ surjektiv $\quad \Longleftrightarrow \quad \left(f^T \circ d_{\mathbf{W}}\right)(\mathbf{W}) = d_{\mathbf{V}}(\mathbf{V})$

Bei endlicher Dimension von $\mathbf{W}$ gilt außerdem:

(1) $f(\mathbf{V}) = (\ker \widehat{f})^{\perp}$

(2) $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} \widehat{f}$

Ist $\dim \mathbf{V} < \infty$ oder $\dim \mathbf{W} < \infty$, so gilt: $\quad f$ injektiv $\quad \Rightarrow \quad \widehat{f}$ surjektiv

Die Koordinatenmatrix von $\widehat{f}$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\Phi_{\widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{B}}}(\widehat{f}) = \omega(\Phi_{\mathbf{BC}}(f))^T$$

7.1 Isometrische Abbildungen

Eine Abbildung $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ heißt **isometrisch**, wenn gilt:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = f(\mathbf{a}) \bullet f(\mathbf{b}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$$

Jede Isometrie ist injektiv.

Eine Abbildung $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ ist genau dann isometrisch, wenn gilt:

$$\mathbf{b}_i \bullet \mathbf{b}_j = f(\mathbf{b}_i) \bullet f(\mathbf{b}_j) \qquad \forall\, \text{Basisvektoren}\, \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbf{B}$$

Wenn $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbf{V}$ in eine Orthonormalbasis von $\mathbf{W}$ überführt, dann ist f isometrisch.

Eine Bijektion ist genau dann isometrisch, wenn gilt: $f^{-1} = \widehat{f}$.

Haben zwei ω-symmetrische Vektorräume $(\mathbf{V}, \iota_{\mathbf{V}})$ und $(\mathbf{W}, \iota_{\mathbf{W}})$ gleichmächtige Orthonormalbasen, so sind sie **isometrisch-isomorph**, d. h. es existiert ein isometrisches $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

Die Gesamtheit aller isometrischen Bijektionen wird **isometrische Gruppe**, im Spezialfall eines symmetrischen bzw. unitären Vektorraumes auch **orthogonale** bzw. **unitäre Gruppe**, genannt.

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ wird **$\boldsymbol{\omega}$-orthogonal** genannt, wenn gilt: $A^{-1} = \omega(A^T)$.

Bezüglich einer Orthonormalbasis wird jede isometrische Abbildung durch eine ω-orthogonale Koordinatenmatrix beschrieben.

Zwei lineare Abbildungen $f_1, f_2 \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ heißen **isometrisch-konjugiert**, wenn es ein isometrisches $g \in GL(\mathbf{V})$ gibt mit: $f_2 = g \circ f_1 \circ g^{-1}$.

Analog werden **$\boldsymbol{\omega}$-orthogonal-ähnliche** Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ erklärt:

$$\exists\, P \in K^{n \times n}\ (\omega\text{-orthogonal}) : \quad B = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

7.2 Selbstadjungierte Abbildungen

Eine Abbildung $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ heißt

- **selbstadjungiert**, wenn gilt: $\widehat{f} = f$
- **antiselbstadjungiert**, wenn gilt: $\widehat{f} = -f$

Jede ω-symmetrische Sesquilinearform $\sigma : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to K$ lässt sich durch höchstens ein (bei $\dim \mathbf{V} < \infty$ durch genau ein) $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ wie folgt darstellen:

$$\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet f(\mathbf{b})$$

Die adjungierte Sesquilinearform ist dann gegeben durch

$$\widehat{\sigma}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet \widehat{f}(\mathbf{b})$$

falls $\widehat{f}$ existiert.

Eine Abbildung $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ ist genau dann (anti-)selbstadjungiert, wenn ihre Koordinatenmatrix bezüglich einer Orthonormalbasis ω-(schief-)symmetrisch ist.

Eine Projektion p ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn p selbstadjungiert ist.

7.3 Die Gram'sche Matrix

Für eine Folge $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)$ von r Vektoren ist die **Gram'sche Matrix** definiert als:

$$G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_r \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_r \bullet \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_r \bullet \mathbf{a}_r \end{pmatrix}$$

Definiert man

$$f: \quad \begin{aligned} K^r &\to \mathbf{V} \\ \mathbf{e}_i &\to \mathbf{a}_i \end{aligned}$$

dann ist

$$\Phi_{\mathbf{EE}}(\widehat{f} \circ f) = G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)^T$$

Es gilt:

(1) $\det G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) = 0 \iff \dim[\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}] < r$

(2) $\det G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) = \det G(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{\sigma(r)}) \qquad \forall\, \sigma \in S_r$

Man kann mit der **Gram'schen Determinante** – d. h. mit der Determinante der Gram'schen Matrix – auch die ***r*-dimensionale Volumsmessung** realisieren:

$$\det G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) = \triangle_{\mathbf{U}}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)^2$$

In einem n-dimensionalen Vektorraum mit $\triangle(\mathbf{B}) = 1$ für alle Rechts-Orthonormalbasen gibt es zu jedem $(n-1)$-Tupel $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})$ einen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbf{V}$ mit

$$\triangle(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

Dieser Vektor $\mathbf{n} =: \mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}$ heißt **Vektorprodukt** von $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})$.

Bei $\dim \mathbf{V} = 2$ schreibt man: $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1^{\times} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{\times} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Bei $\dim \mathbf{V} = 2$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^T$$

und

$$\det G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$$

7.4 Normale Abbildungen

Eine Abbildung $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ heißt **normal**, wenn sie eine adjungierte Abbildung besitzt und mit dieser kommutiert, d. h. $f \circ \widehat{f} = \widehat{f} \circ f$.
Insbesondere ist jede (anti-)selbstadjungierte Abbildung und jede isometrische Abbildung normal.

Für jede normale Abbildung gilt:

$$f(\mathbf{a}) \bullet f(\mathbf{a}) = \widehat{f}(\mathbf{a}) \bullet \widehat{f}(\mathbf{a}) \qquad \forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V}$$

Existiert eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von f, dann ist f normal.

Eine Matrix heißt **ω-normal**, wenn gilt: $\omega(A^T) \cdot A = A \cdot \omega(A^T)$.

Für eine normale Abbildung $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ mit dem Eigenwert $t \in K$ ist $\omega(t)$ Eigenwert von $\widehat{f}$, und die beiden Eigenräume stimmen überein. Insbesondere ist $t = \pm\omega(t)$, falls f (anti-)selbstadjungiert, bzw. $t \cdot \omega(t) = 1$, falls f isometrisch ist.

Ist $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ normal, so sind zwei zu verschieden Eigenwerten gehörige Eigenräume aufeinander orthogonal.

Der **Spektralsatz** besagt, dass für eine normale Abbildung $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren existiert.

8 Euklidische und unitäre Vektorräume

Da über $\mathbb{C}$ das charakteristische Polynom immer zerfällt, kann man (für den euklidischen Fall über den „Umweg“ der komplexen Erweiterung) für normale Abbildungen $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ folgende Aussagen machen:

Unitär

Typ	Eigenwert
normal	$\in \mathbb{C}$
hermitesch	$\in \mathbb{R}$
schiefhermitesch	$\in i \cdot \mathbb{R}$
unitär	$z \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot \overline{z} = 1$

Euklidisch

Typ	Eigenwerte (über $\mathbb{C}$)	Reelle JNF bezgülich ONB
normal	beliebig in $\mathbb{C}$	nur 1×1-Kästchen und $\boxed{\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}}$
symmetrisch	alle reell	$\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) \quad t_i \in \mathbb{R}$
schiefsymmetrisch	$\in i \cdot \mathbb{R}$	nur $\boxed{0}$ und $\boxed{\begin{matrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{matrix}}$
orthogonal	$1,\ -1,\ e^{i\varphi}$	nur $\boxed{1}$, $\boxed{-1}$ und $\boxed{\begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}}$

Eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren existiert also im unitären Fall immer, im euklidischen Fall (zumindest) dann, wenn f symmetrisch ist.

8.1 Drehungen

Die Gruppe der **Drehungen** ist $SO(\mathbf{V}) := O^+(\mathbf{V}) = O(\mathbf{V}) \cap SL(\mathbf{V})$.

$SO(n)$ ist nur für $n = 2$ kommutativ.

Der **Satz von Euler-D'Alembert** besagt, dass in jedem Vektorraum ungerader Dimension ein vom Nullvektor verschiedener Fixvektor einer Drehung existiert.

8.2 Singulärwerte

In zwei endlichdimensionalen Vektorräumen, die beide euklidisch oder unitär sind, ist zu jedem $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ die Abbildung $\widehat{f} \circ f$ selbstadjungiert und besitzt nur nicht-negative reelle Eigenwerte. Die positiven Quadratwurzeln der von 0 verschiedenen Eigenwerte von $\widehat{f} \circ f$ heißen **Singulärwerte** von f. Die **Vielfachheit** eines Singulärwertes ist gleich der algebraischen Vielfachheit der zugehörigen Eigenwertes von $\widehat{f} \circ f$ (die wiederum gleich der geometrischen Vielfachheit ist).
Analog sind die Singulärwerte einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ erklärt als die Eigenwerte der Matrix $\overline{A}^T \cdot A$.

Für jedes $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ mit $\operatorname{rg} f = r$ existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbf{V}$ mit

(1) $(\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_n)$ ist Basis von $\ker f$

(2) $(f(\mathbf{b}_1), \ldots, f(\mathbf{b}_r))$ ist Orthogonalbasis von $f(\mathbf{V})$

(3) $\|f(\mathbf{b}_1)\|, \ldots, \|f(\mathbf{b}_r)\|$ sind genau die Singulärwerte von f

Bezüglich passender Orthonormalbasen $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{C}$ von $\mathbf{V}$ bzw. $\mathbf{W}$ hat die Koordinatenmatrix von $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ die Gestalt

$$\Phi_{\mathbf{BC}}(f) = \operatorname{diag}(\sqrt{w_1}, \ldots, \sqrt{w_r}, 0, \ldots, 0)$$

wobei $\sqrt{w_1}, \ldots, \sqrt{w_r}$ die Singulärwerte von f sind.

8.3 Moore-Penrose-Pseudoinverse

Eine Abbildung $g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ heißt **Moore-Penrose-Pseudoinverse** von $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, wenn gilt:

(1) $f \circ g \circ f = f, \quad g \circ f \circ g = g$

(2) $g \circ f$, $f \circ g$ sind selbstadjungiert.

Es sei p die Orthogonalprojektion von $\mathbf{W}$ auf $f(\mathbf{V})$ und $f_1 : f(\mathbf{V}) \to \mathbf{V}$ jene lineare Abbildung, die jedem Vektor $f(\mathbf{x})$ sein einziges Urbild in $(\ker f)^\perp$ zuordnet. Dann ist $f^+ := f_1 \circ p$ die einzige Moore-Penrose-Pseudoinverse von f.

Eine analoge Definition der Moore-Penrose-Pseudoinversen ist auch für Matrizen möglich.

Ist f_A injektiv, so gilt: $A^+ = (\overline{A}^T \cdot A)^{-1} \cdot \overline{A}^T$.
Ist f_A surjektiv, so gilt: $A^+ = \overline{A}^T \cdot (A \cdot \overline{A}^T)^{-1}$.

Über die Moore-Penrose-Pseudoinverse kann man auch ein unlösbares (weil überbestimmtes) lineares Gleichungssystem nach der **Methode der kleinsten Fehlerquadrate** lösen: Die kürzeste verallgemeinerte Lösung von $A \cdot (x_j) = (s_i)$ ist $A^+ \cdot (s_i)$, alle verallgemeinerten Lösungen werden von $A^+ \cdot (s_i) + \ker f_A$ beschrieben.

8.4 Hauptachsentransformationen

In einem endlichdimensionalen, euklidischen oder unitären Vektorraum ist für eine symmetrische Bi- bzw. hermitsche Sesquilinearform σ eine **Hauptachsentransformation** möglich, d. h. es gibt eine Orthonormalbasis $\mathbf{B}$, so dass $\Phi_{\mathbf{B}}(\sigma)$ Diagonalgestalt hat.

Hat man zwei symmetrische Bi- bzw. hermitsche Sesquilinearformen σ_1 und σ_2, von denen wenigsten eine definit ist, gegeben, so kann man σ_1 und σ_2 simultan auf Diagonalgestalt transformieren, indem man die definite Form (bzw. das Negative der definiten Form) als Skalarprodukt auffasst. Dann leistet $P = \overline{G}_1{}^{-1} \cdot \overline{G}_2$ die gewünschte **simultane Transformation auf Diagonalgestalt**.

9 Metrisch-affine Geometrie

Den metrischen Raum $\mathcal{A}(\mathbf{r} + \mathbf{X}, \iota)$ nennt man **metrisch-affinen Raum**.

In einem metrisch-affinen Raum nennt man zwei Geraden – bzw. allgemeiner: zwei Unterräume – **orthogonal**, wenn die zugehörigen Unterräume von $\mathbf{X}$ aufeinander orthogonal stehen.

Eine Basis $\mathcal{M}$ eines metrisch-affinen Raumes heißt **kartesisch**, wenn es ein $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ gibt, so dass $\{\mathbf{p} - \mathbf{u} \mid \mathbf{p} \in \mathcal{M} \setminus \{\mathbf{u}\}\}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbf{X}, \iota)$ ist. Bei endlicher Dimension nennt man ein affines Koordinatensystem $(\mathbf{u}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ ein **kartesisches Koordinatensystem**, wenn $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{u})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbf{X}$ ist.

Unter dem **Abstandsquadrat** zweier Punkte $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ versteht man den Skalar $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \bullet (\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Mittels der Gleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \bullet (\mathbf{x} - \mathbf{m}) = c$ ist dann eine

Sphäre erklärt. Bei endlicher Dimension und bilinearem Skalarprodukt ist jede Sphäre eine Quadrik.

In einem euklidisch- bzw. unitär-affinen Raum ist der **Abstand** zweier Punkte **a**,**b** erklärt als $\mathrm{dist}(\mathbf{a},\mathbf{b}) := \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$. Der Abstand zweier Punktmengen $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ ist dann

$$\mathrm{dist}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \inf_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{X}\\ \mathbf{y}\in\mathcal{Y}}} \mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Hat man in einem euklidisch- bzw. unitär-affinen Raum zwei disjunkte, endlichdimensionale Unterräume $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(\mathbf{s_1}+\mathbf{U_1})$ und $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}(\mathbf{s_2}+\mathbf{U_2})$ gegeben, so existiert eine zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ orthogonale **Treffgerade**. Alle diese Geraden sind zueinander parallel, und $\mathrm{dist}(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)$ ist genau der Abstand der Schnittpunkte der Treffgeraden mit $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$.

Mittels der **Hesse-Normalform einer Hyperebenengleichung** kann man den Abstand eines Punktes **p** von einer Hyperebene berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}:\quad & (\mathbf{x}-\mathbf{s})\bullet\,\mathbf{n}+a=0 \qquad \text{mit } \mathbf{s}\in\mathbf{r}+\mathbf{X},\ \mathbf{n}\in\mathbf{X},\ \|\mathbf{n}\|=1 \\ \Rightarrow\quad & \mathrm{dist}(\mathbf{p},\mathcal{H}) = |(\mathbf{p}-\mathbf{s})\bullet\,\mathbf{n}+a| \end{aligned}$$

9.1 Kongruenzabbildungen

Eine affine Abbildung $\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ mit der zugehörigen linearen Abbildung $f_\alpha:\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ heißt **Kongruenzabbildung**, falls f_α isometrisch ist, bzw. **Ähnlichkeitsabbildung**, falls es ein $c\in K^\times$ gibt, so dass gilt:

$$c\cdot(\mathbf{a}\bullet\,\mathbf{b}) = f_\alpha(\mathbf{a})\bullet\, f_\alpha(\mathbf{b}) \qquad \forall\,\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{X}$$

Zwei Punktmengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ werden **kongruent** bzw. **ähnlich** genannt, falls es eine Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsabbildung α mit $\alpha(\mathcal{M})=\mathcal{M}'$ gibt.
Ist f_α insbesondere eine isometrische Bijektion, so heißen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ **kongruent-isomorph**.

Alle bijektiven Ähnlichkeits- und Kongruenzabbildungen bilden die **Ähnlichkeits-** bzw. **Kongruenzgruppe** *AGO*, *AGU* bzw. *AO*, *AU*.

In einem n-dimensionalen metrisch-affinen Raum über angeordneten Körpern wird jede gleichsinnige Kongruenzabbildung auch **Bewegung** genannt.

Beispiele für Kongruenzabbildungen sind:

- **Translation** $\tau_\mathbf{a}$ $\quad(\mathbf{a}\in\mathbf{X})$
- **Spiegelung** an $\mathcal{H}$: $\ \mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2\cdot\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{p})\bullet\,\mathbf{n}}{\mathbf{n}\bullet\,\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}$
- **Drehung** um **a** $\quad(f_\alpha \ldots\ldots$ Drehung von $\mathbf{X})$
- **Schraubung**: Zusammensetzung einer Translation τ in Richtung $[\mathbf{b}]$ und einer Drehung „um“ $\mathbf{a}+[\mathbf{b}]$

9.2 Winkelmessung

Das **Winkelmaß** zweier Geraden $\mathbf{s}+[\mathbf{u}]$ und $\mathbf{t}+[\mathbf{v}]$ in einem euklidisch-affinen Raum ist erklärt als

$$\arccos\left|\frac{\mathbf{u}\bullet\,\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\right| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

9.3 Quadriken in euklidisch-affinen Räumen

In einem euklidisch-affinen Raum existiert ein kartesisches Koordinatensystem, so dass eine quadratische Funktion in **euklidischer Normalform** vorliegt, d. h. eine der folgenden Darstellungen hat:

(A0) $(x_1 \ \cdots \ x_n)^T \mapsto g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_p \cdot x_p^2 - g_{p+1} \cdot x_{p+1}^2 - \ldots - g_r \cdot x_r^2$ $\quad (0 \leq p \leq r \leq n)$

(A1) $(x_1 \ \cdots \ x_n)^T \mapsto g_0 + g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_p \cdot x_p^2 - g_{p+1} \cdot x_{p+1}^2 - \ldots - g_r \cdot x_r^2$ $\quad (0 \leq p \leq r \leq n)$

(B) $(x_1 \ \cdots \ x_n)^T \mapsto g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_p \cdot x_p^2 - g_{p+1} \cdot x_{p+1}^2 - \ldots - g_r \cdot x_r^2 - 2g \cdot x_n$ $\quad (0 \leq p \leq r < n)$

Auch die zugehörigen Quadriken haben bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $(\mathbf{u},\ \mathbf{u}+\mathbf{b}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}+\mathbf{b}_n)$ **euklidische Normalform**:

(A0) $g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_p \cdot x_p^2 - g_{p+1} \cdot x_{p+1}^2 - \ldots - g_r \cdot x_r^2 = 0 \qquad (0 \leq p \leq r \leq n)$

(A1) $g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_p \cdot x_p^2 - g_{p+1} \cdot x_{p+1}^2 - \ldots - g_r \cdot x_r^2 = \pm 1 \qquad (0 \leq p \leq r \leq n)$

(B) $g_1 \cdot x_1^2 + \ldots + g_p \cdot x_p^2 - g_{p+1} \cdot x_{p+1}^2 - \ldots - g_r \cdot x_r^2 = 2 \cdot x_n \qquad (0 \leq p \leq r < n)$

Ist $\mathcal{Q}_{\mathit{aff}}$ nicht parabolisch, so bezeichnet man $\mathbf{u}+\mathbf{b}_i$ als die **Achsen** der Quadrik. Punkte der Achsen, die auf der Quadrik liegen, werden als **Scheitel** bezeichnet. Deren Abstand von $\mathbf{u}$ ist genau die halbe **Achsenlänge**. Ist $\mathcal{Q}_{\mathit{aff}}$ parabolisch, so nennt man $\mathbf{u}$ einen Scheitel und $\mathbf{u}+\mathbf{b}_n$ eine Achse der Quadrik.

Schließlich verdienen die **Drehquadriken** eine besondere Beachtung.

10 Lineare Optimierung

Eine Punktmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}$ auch die **Strecke** $C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = t \cdot \mathbf{a} + (1-t) \cdot \mathbf{b},\ 0 \leq t \leq 1\}$ in $\mathcal{M}$ liegt.

Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ einer nichtleeren Familie konvexer Mengen ist wieder konvex.

Ein Punkt $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ konvex) heißt **extremal**, wenn es keine zwei Punkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{M}$ gibt, deren Mittelpunkt gleich $\mathbf{p}$ ist.

Eine **Normalform** einer linearen **Optimierungsaufgabe** liegt vor mit

$$\begin{array}{rcl} A \cdot (x_j) & \leq & (s_i) \quad \ldots\ldots \text{ lineares } (m,n)\text{-Ungleichungssystem} \\ x_1, \ldots, x_n & \geq & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$z : (x_1 \ \cdots \ x_n)^T \mapsto c_1 \cdot \overset{x}{_1} + \ldots + c_n \cdot x_n + c \ \ldots\ldots \ \textbf{Zielfunktion}$$

Durch die Einführung von **Schlupfvariablen** kann man das lineare (m, n)-Ungleichungssystem auf ein $(m, m+n)$-Gleichungssystem transformieren.

Ist $l = (l_1 \ \cdots \ l_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T$ Lösung von $A \cdot (x_j) = (s_i)$, dann ist l genau dann eine Ecke, wenn $\operatorname{rg}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) = r$ oder $r = 0$.

Falls die lineare Optimierungsaufgabe in Normalform (mit Schlupfvariablen) eine Lösung besitzt, so ist die Menge aller Lösungen konvex. Das Maximum der Zielfunktion wird dann auch in einer Ecke des Zulässigkeitsbereiches angenommen.

Man fasst eine lineare Optimierungsaufgabe in einem **Tableau** zusammen:

$$\begin{array}{c|c} A & s_i \\ \hline c_1 \ \cdots \ c_{m+n} & -c \end{array} \quad \begin{array}{l} \left.\right\} \geq 0 \\ \ldots\ldots \text{ Zielfunktion: } \sum\limits_{j=1}^{m+n} c_j \cdot x_j + c \to \text{MAX} \end{array}$$

Eine Addition einer Linearkombination der ersten m Zeilen zur Zielfunktion verändert diese zwar, doch es gilt: $\widetilde{z}|_{\mathcal{L}} = z|_{\mathcal{L}}$.

Sei $\begin{array}{cc|c} E_m & \widetilde{A} & \widetilde{s}_i \\ \hline 0 & \widetilde{c}_j & -\widetilde{c} \end{array}$ das Tableau einer linearen Optimierungsaufgabe. Dann gilt folgendes **Kriterium für eine Optimalstelle**:

(1) Falls $\widetilde{c}_j \leq 0 \quad \forall\, j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$, dann ist die zulässige Basislösung $(s_1 \ \cdots \ s_m \ 0 \ \cdots \ 0)^T$ optimal, und $\widetilde{c}$ das Maximum der Zielfunktion.

(2) Falls ein $\widetilde{c}_k > 0$ ($k \in \{m+1, \ldots, m+n\}$) und keines der Elemente $\widetilde{a}_{1k}, \ldots, \widetilde{a}_{mk}$ positiv ist, dann existiert kein Maximum.

Der **Simplexalgorithmus** liefert ein Verfahren, um aus einem Tableau durch Umformungen zu einer optimalen Ecke zu gelangen. Dieser Algorithmus bricht sicher dann ab, wenn zu jedem Schritt eine nicht ausgeartete Basislösung gehört.

Eine lineare Optimierungsaufgabe, die nicht in Normalform vorliegt, löst man durch die Einführung von **Scheinvariablen** und durch Maximieren der **sekundären Zielfunktion**

$$w : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{M+n} \end{pmatrix} \mapsto -\sum_{j=n+q-1}^{n+M} x_j$$

Falls das Maximum 0 ist, sind die Lösungen dann genau die Lösungen der ursprünglichen Aufgabe. So kann man jede lineare Optimierungsaufgabe durch Anwendung der **beiden Phasen des Simplexalgorithmus** versuchen zu lösen.

10.1 Primale und duale Aufgaben

Man bezeichnet die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcll} A \cdot (x_j) & \leq & (s_i) & \qquad s_i \in \mathbb{R} \\ x_1, \ldots, x_n & \geq & 0 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + c} & \text{max.} \end{array}$$

als **primale Aufgabe**. Dann ist die dazu **duale Aufgabe** erklärt durch

$$\begin{array}{rcll} A^T \cdot (y_i) & \geq & (c_j) & \\ y_1, \ldots, y_m & \geq & 0 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{s_1 y_1 + \ldots + s_m y_m + c} & \text{min.} \end{array}$$

Ist $(l_j) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ eine Lösung des primalen Ungleichungssystems und $(k_i) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ eine Lösung des dualen Ungleichungssystems, dann gilt:

$$c_1 \cdot l_1 + \ldots + c_n \cdot l_n + c \leq s_1 \cdot k_1 + \ldots + s_m \cdot k_m + c$$

Gilt hier das Gleichheitszeichen, so sind beiden Lösungen optimal.

Ist $(l_j) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ eine optimale Lösung der primalen Aufgabe, so hat auch die duale Aufgabe eine optimale Lösung, wobei die beiden Zielfunktionen denselben Wert annehmen.

10.2 Ganzzahlige lineare Optimierung

Für die **ganzzahlige lineare Optimierung** gilt: Sei

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_{m+1} & \cdots & x_{m+n} & \\ \hline x_1 & \widetilde{a}_{1,m+1} & \cdots & \widetilde{a}_{1,m+n} & \widetilde{s}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_m & \widetilde{a}_{m,m+1} & \cdots & \widetilde{a}_{m,m+n} & \widetilde{s}_m \\ \hline & \widetilde{c}_1 & \cdots & \widetilde{c}_n & -\widetilde{c} \end{array}$$

ein optimales Tableau mit $\widetilde{s}_1 \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N}$. Dann erfüllt jedes zulässige ganzzahlige Programm die Ungleichung

$$(\widetilde{a}_{1,m+1} - [\widetilde{a}_{1,m+1}]) \cdot x_{m+1} + \ldots + (\widetilde{a}_{1,m+n} - [\widetilde{a}_{1,m+n}]) \cdot x_{m+n} \geq \widetilde{s}_1 - [\widetilde{s}_1]$$

Index