Analysis I

Eine Zusammenfassung von Bernhard Kabelka
zur Vorlesung von Prof. Schnabl im WS 1999/2000

Version 2.02, 14. Mai 2004

Es sei ausdrücklich betont, dass

(1) dieses Essay ohne das Wissen und die Mitarbeit von Prof. Schnabl entstanden ist,

(2) trotz großer Anstrengungen seitens des Autors, eine möglichst fehlerfreie und vollständige Zusammenfassung zu liefern, sich Fehler eingeschlichen haben könnten (sollte jemand einen Fehler entdecken, so bittet der Autor um Benachrichtigung, vorzugsweise per eMail an bernhard@kabelka.net),

(3) die Lektüre dieser Zusammenfassung keinesfalls den persönlichen Besuch der Vorlesung bzw. das Studium des Skriptums ersetzen, sondern bestenfalls ergänzen kann.

Die aktuelle Version dieser Datei ist erhältlich unter:
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/ana1.pdf`
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/ana1.ps.gz`

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

Das System der **natürlichen Zahlen** kann durch die **Peano-Axiome** beschrieben werden:

(1) $0 \in \mathbb{N}$

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad \exists|\, m \in \mathbb{N}\colon \quad m$ ist Nachfolger von n (in Zeichen: $m = n|$)

(3) 0 ist nie Nachfolger, d. h.: $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad n| \neq 0$

(4) $\forall\, n,\, m \in \mathbb{N}: \quad n| = m| \quad \Rightarrow \quad n = m$

(5) Durch Nachfolgerbildung wird jede natürliche Zahl erreicht, d. h.:

$$\forall\, M \subseteq N: \ (0 \in M \ \wedge \ (\forall\, n \in \mathbb{N}: \ n \in M \ \Rightarrow \ n| \in M)) \quad \Rightarrow \quad M = \mathbb{N}$$

(**Prinzip der vollständigen Induktion**)

1.1 Elementare Kombinatorik

(1) **Geordnete Stichprobe** vom Umfang k aus n Elementen mit Zurücklegen („**Variation** von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung“):

$$V_{n,k}^{W} = n^k \qquad\qquad n, k \in \mathbb{N}$$

$V_{n,k}^{W}$ entspricht genau der Anzahl der Abbildungen

$$f: \{1,\, 2,\, \ldots,\, k\} \to \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$$

(2) **Geordnete Stichprobe** vom Umfang k aus n Elementen ohne Zurücklegen („**Variation** von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung“):

$$V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \qquad\qquad n \geq k \in \mathbb{N}$$

$V_{n,k}$ entspricht genau der Anzahl der *injektiven* Abbildungen

$$f: \{1,\, 2,\, \ldots,\, k\} \to \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$$

(3) **Permutation** von n Elementen:

$$P_n = V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(4) **Permutation** mit Wiederholung:

$$\left.\begin{array}{c} k_1 \text{ Elemente der ersten Art} \\ k_2 \text{ Elemente der ersten Art} \\ \vdots \\ k_s \text{ Elemente der } s\text{-ten Art} \end{array}\right\} \quad n = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$$

$$P_{k_1,\,\ldots,\,k_s}^{n} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!} \qquad\qquad k_i \in \mathbb{N} \quad (i = 1,\, \ldots,\, s)$$

(5) **Ungeordnete Stichprobe** vom Umfang k aus n Elementen ohne Zurücklegen („**Kombination** von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung“):

$$\begin{aligned} K_{n,k} \cdot k! &= V_{n,k} \\ K_{n,k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$K_{n,k}$ entspricht genau der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge bzw. genau der Anzahl der *strikt wachsenden* Abbildungen

$$f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

(6) **Ungeordnete Stichprobe** vom Umfang k aus n Elementen mit Zurücklegen („**Kombination** von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung“):

$$K^W_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$K_{n,k}$ entspricht genau der Anzahl der *wachsenden* Abbildungen

$$f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

Brauchbar zur Abschätzung von $n!$ ist oft die **Stirling’sche Formel**:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot x_n \qquad \text{mit } x_n \to 1 \text{ für } n \to \infty$$

1.2 Körper

$(K, +, \cdot, 0, 1)$ heißt **(kommutativer) Körper** wenn gilt:

(1) $+ : K \times K \to K : \ (x, y) \mapsto x + y$

(2) $\cdot : K \times K \to K : \ (x, y) \mapsto x \cdot y$

(3) • **Kommutativgesetze**: $x + y = y + x$
$x \cdot y = y \cdot x$

• **Assoziativgesetze**: $(x + y) + z = x + (y + z)$
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

• **Distributivgesetz**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(4) $0, 1 \in K, \ 0 \neq 1 : \quad x + 0 = x , \quad 1 \cdot x = x$

(5) $\forall a, b \in K : \ \exists| \, c \in K : a + c = b$
$c := b - a$

$$\forall\, a,\, b \in K \text{ mit } a \neq 0:\ \exists|\, d \in K : a \cdot d = b$$
$$d := \tfrac{b}{a}$$

$(M, \leq)$ heißt **totalgeordnete Menge**, wenn gilt:

(1) $x \leq x \quad \forall\, x \in M$

(2) $x \leq y \ \wedge\ y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y$

(3) $x \leq y \ \wedge\ y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z$

(4) $\forall\, x,\, y \in M:\ x \leq y \ \vee\ y \leq x$

Ein kommutativer Körper $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ heißt **angeordnet**, wenn gilt:

(1) $(K, \leq)$ ist eine totalgeordnete Menge

(2) Es gelten die **Monotonieaxiome**:

- $\forall\, x,\, y,\, z \in K: \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z$
- $\forall\, x,\, y,\, z \in K: \quad x \leq y \ \wedge\ 0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z$

Ist K ein angeordneter Körper, so enthält er $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ als Unterbereich.

In Körpern gelten folgende **Ungleichungen**:

- **Cauchy-Schwarz-Bunjakowski**:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right)^2 \ \leq\ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
Gleichheit, wenn $\exists\, (\lambda, \mu) \neq (0, 0):\ \lambda \cdot (a_1,\, \ldots,\, a_n) + \mu \cdot (b_1, \ldots, b_n) = 0$

- **Arithmetisch-Geometrische Mittelungleichung**
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ \geq\ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
Gleichheit für $a_i = a_j \quad \forall\, i,\, j$

- **Bernoulli-Ungleichung**
$$(1 + p)^n \geq 1 + np \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, p \geq -1$$
scharfe Ungleichung für $p > -1,\, p \neq 0,\ n = 2,\, 3,\, \ldots$

In einem angeordneten Körper $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\forall\, a \in K: \quad \exists\, n \in \mathbb{N}: \quad a < n$ (**Axiom des Archimedes**)

(2) $\forall\, a \in K: \quad a < \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

(3) $\forall\, a,\, b \in K:\ 0 < a < b \ \Rightarrow\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ na > b$ (**Axiom des Eudoxus**)

(4) $\forall\, a \in K: \quad \exists\, m \in \mathbb{Z}: \quad m \leq a < m + 1$

Erfüllt ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ diese Aussagen, so heißt er **archimedisch angeordneter Körper**.

1.3 Die Konstruktion der reellen Zahlen

Der **Satz über die Vollständigkeit der reellen Zahlen** besagt, dass für einen archimedisch angeordneten Körper $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ist ein maximaler archimedisch angeordneter Körper

(2) Jeder p-adische Systembruch tritt auf:

$$\begin{aligned} \forall\, (a_0,\, a_1,\, \ldots): \quad & a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_k \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, p-1\} \;\forall\, k = 1,\, 2,\, \ldots \\ & a_k \neq p-1 \quad \text{unendlich oft} \\ \Rightarrow \quad \exists\, a \in K: \quad & a = a_0 + 0, a_1 a_2 \ldots \end{aligned}$$

(3) Jeder Dedekind'scher Schnitt in K besitzt eine Schnittzahl in K:

$(A|B)$ heißt **Dedekind'scher Schnitt** in K, wenn gilt

(a) $A,\, B \subseteq K,\; A \neq \emptyset,\; B \neq \emptyset$

(b) $A \cup B = K,\; A \cap B = \emptyset$

(c) $\forall\, x,\, y \in K:\; x \in A \;\wedge\; y \in B \quad \Rightarrow \quad x < y$

Ein Element $c \in K$ heißt **Schnittzahl** von $(A|B)$, wenn $\forall\, x,\, y \in K$ mit $x \in A$ und $y \in B$ gilt: $x \leq c \leq y$.

(4) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt in K ein Supremum (kleinste obere Schranke):

- $c \in K$ heißt **obere Schranke** von M, wenn gilt: $x \leq c \quad \forall\, x \in M$
- $c \in K$ heißt **untere Schranke** von M, wenn gilt: $x \geq c \quad \forall\, x \in M$
- P heißt **nach oben beschränkt**, wenn eine obere Schranke von P existiert.
- P heißt **nach unten beschränkt**, wenn eine untere Schranke von P existiert.
- P heißt **beschränkt**, wenn sowohl eine untere als auch eine obere Schranke von P existiert.
- $c \in K$ heißt **Supremum** von M, wenn c obere Schranke von M ist, und für alle oberen Schranken b von M gilt: $b \geq c$
- $c \in K$ heißt **Infimum** von M, wenn c untere Schranke von M ist, und für alle unteren Schranken b von M gilt: $b \leq c$

(5) Jede monotone und beschränkte Folge in K ist in K konvergent:

Ein Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- **monoton wachsend**, wenn gilt: $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
- **strikt monoton wachsend**, wenn gilt: $x_{n+1} > x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

- **monoton fallend**, wenn gilt: $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
- **strikt monoton fallend**, wenn gilt: $x_{n+1} < x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(6) Jede Intervallschachtelung in K bestimmt eine Zahl in K:

Ein System von Intervallen $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Intervallschachtelung**, wenn gilt:

(a) $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(b) $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

Ein Element $c \in K$ wird durch eine Intervallschachtelung bestimmt, wenn gilt: $c \ \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(7) In K gilt der **Satz von Bolzano-Weierstraß**:

Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K besitzt in K einen Häufungswert.

(8) In K gilt das **Cauchy'sche Konvergenzkriterium**:

Jede Cauchyfolge in K ist in K konvergent.

(9) In K gilt der **Satz von Heine-Borel**:

Ist $]a_i, b_i[_{i\in I}$ eine **Überdeckung** von $[a, b]$, d. h. $[a, b] \subseteq \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$, dann reichen endlich viele Intervalle aus, d. h.:

$$[a, b] \ \subseteq]a_{i_1}, b_{i_1}[\cup \ldots \cup]a_{i_k}, b_{i_k}[$$

Es existiert (bis auf Isomorphie) genau ein maximaler archimedisch angeordneter Körper $(\mathbb{R}, x, \cdot, 0, 1, \leq)$, der **Körper der reellen Zahlen**.

1.4 Konvergente Folgen

Eine **Folge** in K ist eine Funktion von $\mathbb{N}$ in K, meist geschrieben als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt **konvergent** in K gegen c, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |x_n - c| < \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Man schreibt dann: $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, oder auch: $x_n \to c$ für $n \to \infty$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Nullfolge**, wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Für die Konvergenz von Folgen gelten folgende **Rechenregeln**:

(1) $\left.\begin{array}{l} x_n \to c \\ y_n \to d \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_n \pm y_n \to c \pm d \\ x_n \cdot y_n \to c \cdot d \end{array}\right.$

(2) $x_n \to 0 \ \wedge \ c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{c}$

(3) $x_n \to 0 \iff x_n - c \to 0$

(4) $x_n \leq y_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \;\wedge\; x_n \to c \;\wedge\; y_n \to d \quad\Rightarrow\quad c \leq d$

(5) $x_n \to 0 \;\wedge\; y_n$ beschränkt $\quad\Rightarrow\quad x_n \cdot y_n \to 0$

(6) $x_n \leq z_n \leq y_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \;\wedge\; x_n \to c \;\wedge\; y_n \to c \quad\Rightarrow\quad z_n \to c$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchyfolge** in K, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon)$$

Es gilt:

(1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

(2) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

(3) In einem maximalen archimedisch angeordneter Körper ist jede Cauchyfolge konvergent.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und s_n definiert durch

$$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$$

Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **(unendliche) Reihe** mit Summanden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. s_n heißt **n-te Partialsumme**. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ heißt dann **konvergent** mit Summe s, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen. Dann gilt nach dem **Kriterium von Leibniz für alternierende Reihen**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot c_n \text{ ist konvergent.}$$

Im Folgenden wird oft $\sum x_n$ abkürzend anstelle von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ verwendet.

1.5 Die Euler'sche Zahl e

Die **Euler'sche Zahl** e ist definiert als

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Man definiert die Funktion $E(a)$ dann durch:

$$E(a) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Die Funktion $E(a)$ hat folgende **Eigenschaften**:

(1) $E(a) > 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

(2) $E(-a) = \frac{1}{E(a)}$

(3) $E(a+b) = E(a) \cdot E(b) \quad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$

(4) $E(a) \geq a + 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

(5) $E(a) = e^a \quad \forall\, a \in \mathbb{Q}$

(6) $a_n \to a \quad \Rightarrow \quad E(a_n) \to E(a)$

(7) $a < b \quad \Rightarrow \quad E(a) < E(b)$

(8) $E(a) \leq \frac{1}{1-a} \quad \forall\, a < 1$

(9) Die Abbildung $E : \mathbb{R} \to\,]0, +\infty[$ ist bijektiv.

Aufgrund der Eigenschaft (6) definiert man dann die **Exponentialfunktion** als $e^a := E(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Wegen der Eigenschaft (9) existiert zu $f(x) = e^x$ eine inverse Funktion, die definiert ist durch:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \,]0, +\infty[\quad &\to \quad \mathbb{R} \\ y \quad &\mapsto \quad \ln y = x \end{aligned}$$

Die Funktion f^{-1} wird meist mit ln bezeichnet und heißt der **natürliche Logarithmus**. $\ln y$ ist jener Exponent, den man zur Basis e erheben muss, um y zu erhalten.

Die Funktion $\ln x$ hat folgende **Eigenschaften**:

(1) ln ist bijektiv und strikt monoton wachsend

(2) $e^{\ln x} = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad \ln e^x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(3) $x_n > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \wedge \;\; x_n \to c \;\; \wedge \;\; c > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x_n \to \ln c$

(4) $\ln x \cdot y = \ln x + \ln y$
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

(5) $\ln e = 1 \quad \ln 1 = 0$

$\ln n$ lässt sich mit Hilfe der folgenden Formel abschätzen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = c \quad \text{mit } 0 < c < 1$$

Die Zahl $c = 0,57\ldots$ nennt man die **Euler-Mascheroni'sche Konstante**.

e^x lässt sich mit Hilfe der folgenden Formel abschätzen:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

1.6 Divergente Folgen

Für eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ gilt:

- $\sup(M) = +\infty$, wenn M nicht nach oben beschränkt ist
- $\inf(M) = -\infty$, wenn M nicht nach unten beschränkt ist

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent gegen $+\infty$**, wenn gilt:

$$\forall\, K \in R: \quad \exists\, N(K): \quad x_n > K \quad \forall\, n > N(K)$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent gegen $-\infty$**, wenn gilt:

$$\forall\, K \in R: \quad \exists\, N(K): \quad x_n < K \quad \forall\, n > N(K)$$

Es gelten folgende **Rechenregeln**:

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$

(2) $x_n \to +\infty\,,\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt $\Rightarrow \quad x_n + y_n \to +\infty$

(3) $x_n \to +\infty\,,\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}:\ \exists\,\alpha > 0:\ y_n \geq \alpha\ \ \forall\, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \cdot y_n \to +\infty$

(4) $x_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_n} \to 0$

(5) $x_n \to 0 \ \wedge\ x_n > 0$ für fast alle $n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_n} \to +\infty$

(6) $x_n \to +\infty \ \wedge\ y_n \geq x_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad y_n \to +\infty$

(7) $x_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt

1.7 Häufungswerte

Ein Punkt $c \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungswert** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ gibt.

$\pm\infty$ heißt **(uneigentlicher) Häufungswert** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \pm\infty$ gibt. Es gilt:

$$\begin{aligned} +\infty \text{ ist Häufungswert} \quad &\iff \quad \sup x_n = +\infty \\ -\infty \text{ ist Häufungswert} \quad &\iff \quad \inf x_n = -\infty \end{aligned}$$

Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einen Punkt $c \in [+\infty, -\infty]$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) c ist der **größte Häufungswert** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(2) c ist das Supremum der Häufungswerte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} = c$ (**Limes superior**)

$$(4)\quad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0: \left\{ \begin{array}{ll} x_n < c+\varepsilon & \text{für fast alle } n\in\mathbb{N} \\ c-\varepsilon < x_n & \text{für unendlich viele } n\in\mathbb{N} \end{array} \right\} & \text{falls } c\in\mathbb{R} \\ \forall\, K\in\mathbb{N}: \quad x_n > K \text{ unendlich oft} & \text{falls } c=+\infty \\ \forall\, K\in\mathbb{N}: \quad x_n < K \text{ für fast alle } n\in\mathbb{N} & \text{falls } c=-\infty \end{cases}$$

Außerdem sind für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einen Punkt $c \in [+\infty, -\infty]$ folgende Aussagen äquivalent:

(1) c ist der **kleinste Häufungswert** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(2) c ist das Infimum der Häufungswerte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} = c$ (**Limes inferior**)

$$(4)\quad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0: \left\{ \begin{array}{ll} c-\varepsilon < x_n & \text{für fast alle } n\in\mathbb{N} \\ x_n < c+\varepsilon & \text{für unendlich viele } n\in\mathbb{N} \end{array} \right\} & \text{falls } c\in\mathbb{R} \\ \forall\, K\in\mathbb{N}: \quad x_n > K \text{ für fast alle } n\in\mathbb{N} & \text{falls } c=+\infty \\ \forall\, K\in\mathbb{N}: \quad x_n < K \text{ unendlich oft} & \text{falls } c=-\infty \end{cases}$$

Für einen Punkt $c \in [+\infty, -\infty]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\, x_n = c \iff \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

1.8 Reihen

Ist $\sum a_n$ eine konvergente Reihe, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Das **Cauchy'sche Konvergenzkriterium für Reihen** besagt, dass $\sum a_n$ genau dann konvergent ist, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0: \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Eine Reihe $\sum a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Beträge $\sum |a_n|$ konvergiert.

Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie konvergent.

Nach dem **Vergleichskriterium erster Art** gilt für zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht negativer reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq n_0$:

- $\sum b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent (**konvergente Majorante**)
- $\sum a_n$ divergent $\Rightarrow$ $\sum b_n$ divergent (**divergente Minorante**)

Daraus kann man das **Wurzelkriterium** folgern:

(1) $\exists M > 0 \quad \wedge \quad \exists q : 0 < q < 1 \quad \wedge \quad 0 \leq a_n \leq M \cdot q^n \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent

(2) $a_n \geq 1$ unendlich oft $\quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ divergent

(3) $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = q \in [0, +\infty]$

- $q < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ (absolut) konvergent
- $q > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ divergent
- $q = 1 \quad \Rightarrow$ keine Entscheidung

Nach dem **Vergleichskriterium zweiter Art** gilt für zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq n_0$:

- $\sum b_n$ konvergent $\quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ konvergent
- $\sum a_n$ divergent $\quad \Rightarrow \quad \sum b_n$ divergent

Daraus gewinnt man das **Quotientenkriterium**, das für Folgen positiver reeller Zahlen a_n gilt:

(1) $\exists q : 0 < q < 1 : \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum a_n$ konvergent

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ divergent

(3) $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q \in [0, +\infty]$

- $q < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ (absolut) konvergent
- $q > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ divergent
- $q = 1 \quad \Rightarrow$ keine Entscheidung

Versagen die obigen Kriterien, kann man noch das **Kriterium von Raabe** probieren, das auch für Folgen positiver reeller Zahlen a_n gilt:

(1) $n \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geq -1 \;\; \forall n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ divergent

(2) $n \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \leq -\alpha \;\; \forall n > n_0 \;\; \wedge \;\; \alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum |a_n|$ konvergent

(3) $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - 1\right) = -\alpha$

- $\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum |a_n|$ konvergent
- $\alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum |a_n|$ divergent
- $\alpha = 1 \quad \Rightarrow$ keine Entscheidung

Ist $\sum |a_n| < +\infty$ und σ eine Permutation (d. h. eine bijektive Abbildung) von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$, dann gilt:

$$\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$$

Reihen mit dieser Eigenschaft nennt man **unbedingt konvergent**. Reihen, bei denen Umordnen den Wert verändern kann, nennt man **bedingt konvergent**.

Nach dem **Riemann'schen Umordnungssatz** gilt, dass eine Reihe genau dann unbedingt konvergent ist, wenn sie absolut konvergiert, und dass sie genau dann bedingt konvergent ist, wenn sie konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

1.9 Topologie von $\mathbb{R}$

Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, wenn für alle x, y, $z \in M$ gilt:

(1) $d(x,y) \geq 0 \quad \wedge \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (**Dreiecksungleichung**)

Das Paar (M,d) heißt dann **metrischer Raum**.

Für ein Element $c \in M$ und ein $\varepsilon > 0$ heißt die Menge

$$U(c,\varepsilon) = \{x \in M \mid d(x,c) < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung von c.

Sei A eine Teilmenge von M. Ein Element $c \in M$ heißt

- **innerer Punkt** von A, wenn gilt: $\exists \varepsilon > 0 : \; U(c,\varepsilon) \subseteq A$
- **äußerer Punkt** von A, wenn gilt: $\exists \varepsilon > 0 : \; U(c,\varepsilon) \subseteq M \backslash A$
- **Randpunkt** von A, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad U(c,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U(c,\varepsilon) \cap M \backslash A \neq \emptyset$$

- **isolierter Punkt** von A, wenn gilt: $\exists \varepsilon > 0 : \; U(c,\varepsilon) \cap A = \{c\}$
- **Häufungspunkt** von A, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \; U(c,\varepsilon) \cap (A \backslash \{c\}) \neq \emptyset$

Die Menge A° aller inneren Punkte von A heißt das **Innere** von A, die Menge ∂A aller Randpunkte von A heißt der **Rand** von A und die Menge $\bar{A} := A^\circ \cup \partial A$ heißt der **Abschluss** von A.

Eine Menge $A \subseteq M$ heißt

- **offen**, wenn gilt: $A = A^\circ$.

- **abgeschlossen**, wenn gilt: $A = \bar{A}$.
- **beschränkt**, wenn ein $K \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $x,\, y \in A$ gilt: $d(x,y) < K$.
- **kompakt**, wenn für A der Satz von Heine-Borel gilt, d. h. dass jede Familie offener Mengen, die A überdeckt, eine endliche Teilfamilie enthält, die A überdeckt.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen c, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, c) = 0$$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ heißt **Cauchyfolge** in M, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall\, n,\, m > N(\varepsilon)$$

Der metrische Raum (M, d) heißt **vollständig**, wenn in (M, d) das Cauchy'sche Konvergenzkriterium gilt.

Der **Satz von Bolzano-Weierstraß** lautet: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt in $\mathbb{R}$ einen Häufungswert. Dazu ist äquivalent: Jede unendliche und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ einen Häufungspunkt.

Der **Satz von Heine-Borel** lautet: In $\mathbb{R}$ gilt, dass jede Familie offener Intervalle, die $[a, b]$ überdeckt, eine endliche Teilfamilie enthält, die $[a, b]$ überdeckt. Dazu ist äquivalent: Jede Familie offener Mengen, die eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge A von $\mathbb{R}$ überdeckt, enthält eine endliche Teilfamilie, die A überdeckt.

1.10 Die komplexen Zahlen

Man erhält die **komplexen Zahlen**, indem man auf $\mathbb{R}^2$ die Operationen $+$ und $\cdot$ erklärt, und anschließend $\mathbb{R}$ vermöge $a \mapsto (a, 0)$ einbettet:

$$\begin{aligned} (x, y) + (a, b) &:= (x + a, y + b) \\ (x, y) \cdot (a, b) &:= (xa - yb, xb + ya) \end{aligned}$$

Üblicherweise bezeichnet man $(0, 1)$ mit i, und eine komplexe Zahl hat dann die Darstellung $z = x + i \cdot y$ mit $x,\, y \in \mathbb{R}$.

Sei $z = x + i \cdot y$ eine komplexe Zahl. Dann heißt

- $\bar{z} := x - i \cdot y$ die **konjugiert komplexe Zahl** zu z
- $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ der **Realteil** von z
- $y = \frac{z-\bar{z}}{2}$ der **Imaginärteil** von z

- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ der **Betrag** von z

Ist $z = x + i \cdot y$ eine komplexe Zahl und $r := |z|$, dann existiert genau ein Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$, sodass gilt: $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Hat man z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ in der Darstellung

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \\ z_2 &= r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \end{aligned}$$

gegeben, so ist das Multiplizieren (bzw. Dividieren) und Potenzieren (bzw. Wurzelziehen) sehr einfach:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ z_1^n &= r_1^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi_1) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi_1)) \end{aligned}$$

Beim Wurzelziehen ist zu beachten, dass es insgesamt n komplexe n-te Wurzeln gibt, d. h. alle ζ_k mit $k = 1, 2, \ldots, n-1$ sind n-te Wurzeln von z_1:

$$\zeta_k = \sqrt[n]{r_1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

2 Funktionen

Eine Funktion $f : M \to A$ heißt

- **Funktion einer reellen Veränderlichen**, wenn $M \subseteq \mathbb{R}$
- **reelle Funktion**, wenn $A \subseteq \mathbb{R}$

M heißt der **Definitionsbereich** von f und wird mit $D(f)$ bezeichnet.
A heißt der **Wertebereich** von f und wird mit $W(f)$ bezeichnet.
Die Menge $f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} \subseteq W(f)$ nennt man **Wertevorrat** von f.

2.1 Stetigkeit

Eine Funktion $f : M \to A$ heißt **stetig in c**, wenn das **Folgenkriterium** gilt:

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} : \quad \lim_{n\to\infty} x_n = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$$

Dazu ist das **$\boldsymbol{\varepsilon}$-$\boldsymbol{\delta}$-Kriterium** äquivalent:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, c) > 0 : \ \forall\, x \in M : \ |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Der **Graph** einer Funktion f ist definiert als die Punktmenge

$$\{(x, y) \in M \times A \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$$

Eine Funktion f heißt **stetig**, wenn f stetig in c für alle $c \in D(f)$ ist.

Eine Funktion f heißt **gleichmäßig stetig**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass gilt:

$$\forall\, x_1\,, x_2 \in D(f)^2 : \; |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Die Menge $C(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } M\}$ bezeichne dann alle auf M stetigen Funktionen.

Es gelten folgende **Rechenregeln**:

(1) f, g stetig in $c \quad \Rightarrow$

- $f + g$ stetig in c
- $f \cdot g$ stetig in c
- $|f|$ stetig in c
- $\max(f, g)$ stetig in c
- $\min(f, g)$ stetig in c

(2) f stetig in $c \;\wedge\; f(c) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f}$ stetig in c

(3) f stetig in $c \;\wedge\; g$ stetig in $f(c) \;\wedge\; f(D(f)) \subseteq D(g) \quad \Rightarrow \quad g \circ f$ stetig in c

(4) f stetig in $c \;\wedge\; f(c) > 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \exists\, \delta > 0 : \; x \in D(f) \cap \,]c - \delta, c + \delta[\quad \Rightarrow \quad f(x) > \frac{f(c)}{2}$

(5) f stetig in $c \;\wedge\; f(c) < 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \exists\, \delta > 0 : \; x \in D(f) \cap \,]c - \delta, c + \delta[\quad \Rightarrow \quad f(x) < \frac{f(c)}{2}$

Der **Zwischenwertsatz** macht folgende drei (äquivalente) Aussagen:

(1) $f \in C[a, b], \;\; f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, c \in]a, b[: \;\; f(c) = 0$

(2) $f \in C(I)$ (I Intervall) $\quad \Rightarrow \quad f(I)$ Intervall

(3) Eine stetige Funktion bildet Intervalle auf Intervalle ab.

Eine stetige Funktion f auf einem Intervall ist genau dann bijektiv, wenn sie strikt monoton wachsend ist. In diesem Fall ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig.

Eine Funktion $f \in C[a, b]$ nimmt auf $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum an, d. h.:

$$f([a, b]) = \left[\min_{x \in [a,b]} f(x), \; \max_{x \in [a,b]} f(x) \right]$$

Eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

2.2 Grenzwerte

Für eine Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, einen Häufungspunkt c von M und einen Wert $A \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x\to c} f(x) = A$, wenn gilt:

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(M\backslash\{c\}\right)^{\mathbb{N}} : \quad x_n \to c \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to A$$

oder äquivalent

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \;\; \exists\, \delta > 0 : \;\; x \in M \;\; \wedge \;\; 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Eine Funktion f ist genau dann stetig in c, wenn c isolierter Punkt von $D(f)$ ist, oder wenn c ein Häufungspunkt von $D(f)$ ist und gilt: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Es gelten folgende **Rechenregeln**:

(1) Sei $f, g : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in [-\infty, +\infty]$, $A, B \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to c} f(x) = A$ sowie $\lim_{x\to c} g(x) = B$. Dann gilt:

- $\lim_{x\to c}(f \pm g)(x) = A \pm B$
- $\lim_{x\to c}(f \cdot g)(x) = A \cdot B$
- $\lim_{x\to c} |f|(x) = |A|$
- $\lim_{x\to c} |f|(x) = 0 \iff \lim_{x\to c} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (falls $B \neq 0$)

(2) Seien $f, g, h : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in M$ und $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A$. Dann gilt: $\lim_{x\to c} h(x) = A$.

(3) Seien $f, g : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in M$ und $\lim_{x\to c} f(x) = A$ sowie $\lim_{x\to c} g(x) = B$. Dann gilt: $A \leq B$.

(4) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ und $g : M' \to R$ (g stetig) mit $W(f) \subseteq D(g)$ gegeben, und gelte $\lim_{x\to c} f(x) = A$. Dann gilt: $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(A)$.

Für eine Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Häufungspunkt c von M gilt $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, wenn gilt:

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(M\backslash\{c\}\right)^{\mathbb{N}} : \quad x_n \to c \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to +\infty$$

oder äquivalent

$$\begin{cases} \forall\, k : \; \exists\, \delta > 0 : \; x \in D(f)\backslash\{c\} : \; |x - c| < \delta \; \Rightarrow \; f(x) > k & \text{falls } c \in \mathbb{R} \\ \forall\, k : \; \exists\, L : \; x \in D(f) : \; x > L \; \Rightarrow \; f(x) > k & \text{falls } c = +\infty \\ \forall\, k : \; \exists\, L : \; x \in D(f) : \; x < L \; \Rightarrow \; f(x) > k & \text{falls } c = -\infty \end{cases}$$

Für eine Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Häufungspunkt c von M gilt $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, wenn gilt:

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(M\backslash\{c\}\right)^{\mathbb{N}} : \quad x_n \to c \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to -\infty$$

oder äquivalent

$$\begin{cases} \forall\, k:\ \exists\, \delta > 0:\ x \in D(f)\backslash\{c\}:\ |x-c| < \delta\ \Rightarrow\ f(x) < k & \text{falls } c \in \mathbb{R} \\ \forall\, k:\ \exists\, L:\ x \in D(f):\ x > L\ \Rightarrow\ f(x) < k & \text{falls } c = +\infty\ ll \\ \forall\, k:\ \exists\, L:\ x \in D(f):\ x < L\ \Rightarrow\ f(x) < k & \text{falls } c = -\infty \end{cases}$$

Für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ und ein $c \in R$ nennt man $\lim_{x\to c^+} f(x) = A$ den **rechtsseitigen Grenzwert**, wenn gilt:

$$\lim_{x\to c} f|_{D(f)\cap]c,+\infty[}(x) = A$$

und $\lim_{x\to c^-} f(x) = B$ den **linksseitigen Grenzwert**, wenn gilt:

$$\lim_{x\to c} f|_{D(f)\cap]-\infty,c[}(x) = B$$

2.3 Unstetigkeiten

2.3.1 Unstetigkeiten erster Art

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in M$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}$ und gilt $A \neq f(c)$, so heißt c eine **hebbare Unstetigkeit** von f.

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \notin M$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}$ so heißt f in c **stetig fortsetzbar**.

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in M$. Existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to c^+} f(x) = A \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to c^-} f(x) = B \in \mathbb{R}$ und gilt $A \neq B$, so sagt man, f besitze in c eine **Sprungstelle** mit der **Sprunghöhe** $h = B - A$.

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in M$. Gelte für die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to c^+} f(x) = A$ bzw. $\lim_{x\to c^-} f(x) = B$ mit $|A| = |B| = +\infty$, so nennt man den Punkt c einen **Pol** oder eine **Unendlichkeitsstelle** von f.

2.3.2 Unstetigkeiten zweiter Art

Eine Unstetigkeit zweiter Art tritt zum Beispiel bei der Funktion $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$ auf:

$$\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to\infty} \sin t = \text{undef.}$$

2.4 Funktionalgleichungen

Erfüllt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $f(x) = f(1) \cdot x$

(2) $f \in C(\mathbb{R})$

(3) f ist stetig in einem Punkt

(4) f ist monoton auf einem (echten) Intervall

(5) f ist beschränkt auf einem (echten) Intervall

(6) f ist (nach oben) beschränkt auf einer Menge, die nicht vom Lebesgue-Maß Null ist

Die einzigen stetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ sind die Exponentialfunktionen $f(x) = e^{x \cdot \ln f(1)}$.

2.5 Trigonometrische und zyklometrische Funktionen

Man kann **Sinus** ($\sin x$) und **Cosinus** ($\cos x$) (als reelle Funktionen) über die Exponentialfunktion wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
\cos x &:= Re(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots \\
\sin x &:= Im(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots
\end{aligned}$$

Definiert man noch 2π als die kleinste positive Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $\sin a = 0$ und $\cos a = 1$, so sind Sinus und Cosinus die uns bekannten stetigen, 2π-periodischen Funktionen mit den üblichen Nullstellen, Summensätzen, etc.:

(1) $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

(2) $\cos(-x) = \cos x$, d. h. cos ist gerade
$\sin(-x) = -\sin x$, d. h. sin ist ungerade

(3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(4) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(5) **Nullstellen**:

$\sin x = 0 \iff x = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

(6) **Additionstheoreme erster Art**:

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

(7) **Additionstheoreme zweiter Art**:

$\sin x \pm \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

Nun kann man **Tangens** ($\tan x$), **Cotangens** ($\cot x$), **Secans** ($\sec x$) und **Cosecans** ($\csc x$) wie folgt definieren:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Schränkt man $\sin x$ auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bzw. $\cos x$ auf das Intervall $[0, \pi]$ ein, so erhält man stetige, strikt monotone, bijektive Funktionen, zu denen daher je eine Umkehrabbildung existiert. Diese werden mit $\arcsin x$ bzw. $\arccos x$ bezeichnet, und sind jeweils nur auf $[-1, +1]$ definiert.

Man beachte, dass zwischen dem sogenannten „**Hauptzweig**“ – das ist die eben erwähnte eindeutige Umkehrabbildung – und den „**Nebenzweigen**“ zu unterscheiden ist:

$$\sin x = a \iff x \in \arcsin a + \mathbb{Z}_{2\pi} \cup \pi - \arcsin a + \mathbb{Z}_{2\pi}$$
$$\cos x = a \iff x \in \arccos a + \mathbb{Z}_{2\pi} \cup -\arccos a + \mathbb{Z}_{2\pi}$$

Für die Hauptzweige gilt:

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Auch $\tan x$ bzw. $\cot x$ besitzen – durch Einschränkung auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bzw. $[0, \pi]$ – Umkehrfunktionen $\arctan x$ und $\operatorname{arccot} x$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Auch hier gibt es wieder **Haupt-** und **Nebenzweige** (analog zu $\arcsin x$ und $\arccos x$).

Für die Hauptzweige gilt:

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

2.6 Hyperbel- und Areafunktionen

Die **Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus** ($\sinh x$) und **Cosinus hyperbolicus** ($\cosh x$) sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\cosh &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ \sinh &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\cosh &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\\ \sinh &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\end{aligned}$$

Auch für die Hyperbelfunktionen gibt es ähnliche Sätze und Additionstheoreme wie für die trigonometrischen Funktionen:

(1) $\cosh(-x) = \cosh x,$ d. h. cosh ist gerade
$\sinh(-x) = -\sinh x,$ d. h. sinh ist ungerade

(2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(3) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$
$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

(4) $\sinh x \pm \sinh y = 2 \cdot \sinh \frac{x \pm y}{2} \cdot \cosh \frac{x \mp y}{2}$
$\cosh x + \cosh y = 2 \cdot \cosh \frac{x+y}{2} \cdot \cosh \frac{x-y}{2}$
$\cosh x - \cosh y = 2 \cdot \sinh \frac{x+y}{2} \cdot \sinh \frac{x-y}{2}$

Der **Tangens hyperbolicus** und der **Cotangens hyperbolicus** sind analog zu den trigonometrischen Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}\tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\\ \coth x &:= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\end{aligned}$$

Die **Areafunktionen** sind die Umkehrabbildungen der Hyperbelfunktionen:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \text{(Hauptzweig)}\\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \text{(Nebenzweig)}\\ \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad |y| < 1\\ \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} \qquad |y| > 1\end{aligned}$$

3 Differentialrechnung

Betrachtet man den Funktionsgraphen einer Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und legt man in einem Punkt $(c, f(c))$ die Sekante durch den Punkt $(c+h, f(c+h))$, so ist der Anstieg dieser Gerade

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

der sogenannte **Differenzenquotient**.

Existiert nun der Grenzwert $f'(c) := \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, so heißt f in c **differenzierbar**, und $f'(c)$ nennt man die **Ableitung** oder den **Differentialquotienten** von f an der Stelle c.
Die **Tangente** an f in c ist dann gegeben durch: $y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$

Eine äquivalente Definition wäre die folgende:
f heißt **differenzierbar** in c und $f'(c)$ heißt **Ableitung** von f in c, wenn es eine Abbildung $r : M \to \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} r(x) &= r(c) = 0 \\ f(x) &= f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + r(x) \cdot (x - c) \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar**, wenn für alle $c \in M$ die Ableitung $f'(c)$ existiert.

Ist f differenzierbar, so ist f stetig.

3.1 Differentiationsregeln

Seien f, $g : M \to \mathbb{R}$ in $c \in M$ differenzierbar. Dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ und – für $g(c) \neq 0$ – $\frac{f}{g}$ in c differenzierbar und es gilt:

(1) $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$

(2) $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$ (**Produktregel**)

(3) $(\lambda \cdot f)'(c) = \lambda \cdot f'(c)$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)\cdot g(c) - f(c)\cdot g'(c)}{g^2(c)}$ (**Quotientenregel**)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ in $c \in M$ differenzierbar, $g : M_1 \to \mathbb{R}$ $(f(M) \subseteq M_1)$ in $d := f(c) \in M_1$ differenzierbar, dann ist $g \circ f$ in c differenzierbar, und es gilt:

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c) \qquad \textbf{(Kettenregel)}$$

Ist $f : I \to J$ (I, J Intervalle) eine stetige, strikt monotone (und damit bijektive) Funktion, dann gilt

$$\begin{aligned} & f \text{ in } c \text{ differenzierbar und } f'(c) \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & f^{-1} \text{ in } f(c) \text{ differenzierbar und } \left(f^{-1}\right)'(f(c)) \neq 0 \end{aligned}$$

und außerdem

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \begin{cases} \frac{1}{f'(c)} & \exists\, f'(c) \quad \wedge \quad f'(c) \neq 0 \\ +\infty & \exists\, f'(c) \quad \wedge \quad f'(c) = 0 \quad \wedge \quad f \text{ wachsend} \\ -\infty & \exists\, f'(c) \quad \wedge \quad f'(c) = 0 \quad \wedge \quad f \text{ fallend} \end{cases}$$

3.2 Einige wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
$c \ \ (c \in \mathbb{R})$	0
$x^\alpha \ \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x \ \ (x > 0)$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x \ \ (\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x \ \ (\lvert x\rvert < 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cos x$
$\cosh x$	$\sin x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (für den Hauptzweig) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (für den Nebenzweig)
$\operatorname{artanh} x \ \ (\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arcoth} x \ \ (\lvert x\rvert > 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$

3.3 Ableitungen höherer Ordnung

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und ist die Funktion $f' : x \mapsto f'(x)$ an $c \in M$ differenzierbar, so nennt f an c **zweimal differenzierbar**. Die Ableitung von f' nennt man die **zweite Ableitung** oder die **Ableitung zweiter Ordnung** von f und bezeichnet sie mit f''.

Induktiv fortgesetzt definiert man so die ***n*-malige Differenzierbarkeit** an c und die ***n*-te Ableitung** (auch **Ableitung *n*-ter Ordnung** genannt) von f, die üblicherweise mit $f^{(n)}$ bezeichnet wird:

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

Für die n-te Ableitung eines Produktes gibt es auch eine Art Produktregel, die sogenannte **Leibniz'sche Formel**:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

3.4 Relative Extrema

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in M$. Man sagt, f besitze in c ein

- **relatives Maximum**, wenn gilt

$$\exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in M \cap U(c, \delta) : \ f(x) \leq f(c)$$

- **relatives Minimum**, wenn gilt

$$\exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in M \cap U(c, \delta) : \ f(x) \geq f(c)$$

- **eigentliches relatives Maximum**, wenn gilt

$$\exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in M \cap (U(c, \delta) \backslash \{c\}) : \ f(x) < f(c)$$

- **eigentliches relatives Minimum**, wenn gilt

$$\exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in M \cap (U(c, \delta) \backslash \{c\}) : \ f(x) > f(c)$$

Besitzt die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ an $c \in M$ ein relatives Extremum, und ist c ein innerer Punkt von $D(f)$, an dem die Ableitung $f'(c)$ existiert, so gilt:

$$f'(c) = 0$$

3.5 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der **Satz von Rolle** besagt, dass für eine Funktion $f \in C[a,b]$, die auf $]a,b[$ differenzierbar ist, und für die gilt, dass $f(a) = f(b) = 0$ ist, gilt:

$$\exists\, \xi \in]a,b[: \quad f'(\xi) = 0$$

Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** besagt, dass für eine Funktion $f \in C[a,b]$, die auf $]a,b[$ differenzierbar ist, gilt:

$$\exists\, \xi \in]a,b[: \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Der **verallgemeinerte Mittelwertsatz der Differentialrechnung** besagt schließlich, dass für zwei Funktion $f,\, g \in C[a,b]$, die beide auf $]a,b[$ differenzierbar sind, und für die $g'(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in]a,b[$ ist, gilt:

$$\exists\, \xi \in]a,b[: \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

3.6 Monotonieverhalten

Ist $f \in C(I)$ (I Intervall) eine auf auf I° differenzierbare Funktion, dann gilt:

(1) $f'(x) \equiv 0 \;\; \forall\, x \in I^\circ \iff f$ ist konstant auf I

(2) $f'(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in I^\circ \iff f$ ist monoton wachsend auf I

(3) $f'(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in I^\circ \iff f$ ist monoton fallend auf I

(4) f ist strikt wachsend auf $I \quad \Rightarrow$

$$f'(x) \geq 0 \text{ auf } I^\circ \;\; \wedge \;\; \big(\{x \in I^\circ \mid f'(x) = 0\}\big)^\circ = \emptyset$$

3.7 Regel von de l'Hospital

Unter den Voraussetzungen

(1) $f,\, g \in C(]a, a+\delta[) \quad (\delta > 0)$

(2) $f,\, g$ differenzierbar auf $]a, a+\delta[$

(3) $g'(x) \neq 0 \quad$ für $a < x < a + \delta$

(4) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$

(5) $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in [-\infty, +\infty]$

gilt:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Analoge Aussagen gelten auch für die Grenzübergange $x \to a^-$, $x \to a$ bzw. $x \to \pm\infty$.

3.8 Konvexe und konkave Funktionen

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
& \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x) \;\; \forall\, x \in M\right\} \text{ ist konvex im } \mathbb{R}^2 \\
\iff \quad & \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2) \geq f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1, \;\; \forall\, x_1,\, x_2 \in M \\
\iff \quad & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(x_n) \geq f(\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n) \\
& \quad \forall\, \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n \geq 0 \text{ mit } \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1, \;\; \forall\, x_1,\, \ldots,\, x_n \in M
\end{aligned}$$

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn $-f$ konvex ist.

Ist f auf einem Intervall I definiert so gilt:

(1) Wenn f auf I stetig und auf I° differenzierbar ist, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

   (a) f ist konvex

   (b) f' ist monoton wachsend

   (c) $f(x) \geq f(c) + f'(c)\cdot(x-c) \qquad \forall\, x \in I \quad \forall\, c \in I^\circ$

(2) Wenn f'' auf I° existiert, dann gilt:

$$f \text{ konvex auf } I \iff f''(x) \geq 0 \text{ auf } I^\circ$$

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **strikt konvex**, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2) > f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, 0 < \lambda < 1, \;\; \forall\, x_1,\, x_2 \in M : \; x_1 \neq x_2 \\
\iff \quad & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(x_n) > f(\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n > 0 \text{ mit } \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, x_1,\, \ldots,\, x_n \in M \text{ (nicht alle gleich)}
\end{aligned}$$

3.9 Taylor'sche Formel

Es existiert genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Dieses Polynom heißt das ***n*-te Taylorpolynom** von f mit Anschlussstelle a:

$$T_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Es gilt:

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + R_n(f,a)(x)$$

wobei $R_n(f,a)(x)$ das **n-te Restglied** genannt wird. Es gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \iff \lim_{n\to\infty} R_n(f,a)(x) = 0$$

Das Restglied kann man zum Beispiel als **Lagrange-Restglied** darstellen:

$$R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta\cdot(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \qquad \vartheta \in]0,1[$$

3.10 Lokale Untersuchung von $y = f(x)$

Die Funktion f besitzt bei a eine **k-fache Nullstelle**, wenn gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = A \neq 0 \qquad A \in \mathbb{R}$$
$$\iff \quad f(x) = (x-a)^k \cdot g(x), \quad \lim_{x\to a} g(x) = A \neq 0 \qquad A \in \mathbb{R}$$

Gilt für die Funktion $f \in C^n(]a-\delta, a+\delta[)$ $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$, so besitzt f in a eine n-fache Nullstelle.

Der folgende Satz liefert eine **hinreichende Bedingung für relative Extrema**: Gilt für die Funktion $f \in C^n(]a-\delta, a+\delta[)$ $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$ und ist

- n gerade, $f^{(n)}(a) > 0$, so besitzt f in a ein eigentliches relatives Minimum
- n gerade, $f^{(n)}(a) < 0$, so besitzt f in a ein eigentliches relatives Maximum
- n ungerade, so besitzt f in a *kein* relatives Extremum

Ein Punkt a heißt **eigentlicher Wendepunkt** von f, wenn an f auf $]a-\delta, a[$ strikt konvex (bzw. konkav) und auf $]a, a+\delta[$ strikt konkav (bzw. konvex) ist.

Ist a ein Wendepunkt von f und f zweimal differenzierbar, so gilt: $f''(a) = 0$.

Der folgende Satz liefert eine **hinreichende Bedingung für Wendepunkte**: Gilt für die Funktion $f \in C^n(]a-\delta, a+\delta[)$ $f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$ und ist

- n gerade, so besitzt f in a *keinen* Wendepunkt
- n ungerade, so besitzt f in a einen Wendepunkt

Index