Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Zusammenfassung von Bernhard Kabelka
zur Vorlesung von Prof. Mlitz im SS 2002

Version 2.01, 15. März 2004

Es sei ausdrücklich betont, dass

(1) dieses Essay ohne das Wissen und die Mitarbeit von Prof. Mlitz entstanden ist,

(2) trotz großer Anstrengungen seitens des Autors, eine möglichst fehlerfreie und vollständige Zusammenfassung zu liefern, sich Fehler eingeschlichen haben könnten (sollte jemand einen Fehler entdecken, so bittet der Autor um Benachrichtigung, vorzugsweise per eMail an bernhard@kabelka.net),

(3) die Lektüre dieser Zusammenfassung keinesfalls den persönlichen Besuch der Vorlesung bzw. das Studium des Skriptums ersetzen, sondern bestenfalls ergänzen kann.

Die aktuelle Version dieser Datei ist erhältlich unter:
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/diff-gl.pdf`
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/diff-gl.ps.gz`

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe und Existenzsätze

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung** ist eine Gleichung der Gestalt

$$g(t,\, x_1,\, x_1',\, \ldots,\, x_1^{(n)},\, \ldots,\, x_k,\, x_k',\, \ldots,\, x_k^{(n)}) = 0$$

wobei die Unbekannten die Funktionen $x_1,\, \ldots,\, x_k$ der reellen Variablen t sind. Die höchste in der Gleichung auftretende Ableitungsordnung nennt man die **Ordnung** der Differentialgleichung.
Tritt die Variable t in der Differentialgleichung nicht explizit auf, so heißt die Differentialgleichung **autonom**; Gleichungen der Gestalt

$$x_1^{(n)} = f(t,\, x_1,\, x_1',\, \ldots,\, x_1^{(n-1)},\, x_2,\, x_2',\, \ldots,\, x_2^{(n)},\, \ldots,\, x_k,\, x_k',\, \ldots,\, x_k^{(n)})$$

heißen **explizit**.

Eine n-mal differenzierbare Funktion $\varphi : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ (M offen) heißt **Lösung** der Differentialgleichung

$$g(t,\, x_1,\, x_1',\, \ldots,\, x_1^{(n)},\, \ldots,\, x_k,\, x_k',\, \ldots,\, x_k^{(n)}) = 0$$

auf M, wenn für alle $t \in M$ gilt:

$$g(t,\, \varphi_1(t),\, \varphi_1'(t),\, \ldots,\, \varphi_1^{(n)}(t),\, \ldots,\, \varphi_k(t),\, \varphi_k'(t),\, \ldots,\, \varphi_k^{(n)}(t)) = 0$$

Jede Lösung definiert also eine Kurve $(\varphi,\, M)$ in $\mathbb{R}^k$, die sogenannte **Lösungskurve**. Ist M ein Intervall, so spricht man von einer **Intervall-Lösung**.

Für die Lösungen einer Differentialgleichung kann man eine **Ordnungsrelation** einführen vermöge

$$(\varphi,\, M) \leq (\psi,\, N) \quad :\Longleftrightarrow \quad M \subseteq N \;\wedge\; \psi|_M = \varphi$$

Durch die Festsetzung $x_{ij} := x_i^{(j-1)}$ kann man eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$g(t,\, x_1,\, x_1',\, \ldots,\, x_1^{(n)},\, \ldots,\, x_k,\, x_k',\, \ldots,\, x_k^{(n)}) = 0$$

in ein äquivalentes System erster Ordnung

$$\begin{cases} x_{ij}' = x_{i,j+1} & i = 1,\, \ldots,\, k \quad j = 1,\, \ldots,\, n-1 \\ g(t,\, x_{11},\, \ldots,\, x_{1n},\, x_{1n}',\, \ldots,\, x_{k1},\, \ldots,\, x_{kn},\, x_{kn}') = 0 & \end{cases}$$

transformieren.

Ein Differentialgleichungssystem $g(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{0}$ heißt **gekoppelt**, wenn es nicht in voneinander unabhängige Teilsysteme zerlegt werden kann. Ist das Gegenteil der Fall, d. h. es existiert eine Auswahl von Koordinaten $i_1,\, \ldots,\, i_m$ von $\mathbf{x}$ und eine Auswahl von Gleichungen $j_1,\, \ldots,\, j_m$, sodass die ausgewählten Gleichungen nur die ausgewählten Koordinaten enthalten, und die restlichen Gleichungen nur von den restlichen Koordinaten abhängen, so nennt man das System **entkoppelt**. Dazwischen liegen die **teilweise entkoppelten** Systeme, bei denen eine Auswahl im obigen Sinn existiert, ohne dass für die nicht ausgewählten Koordinaten und Gleichungen irgendwelche Voraussetzungen gemacht werden.

Sei $h : M \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist die Festsetzung $\mathbf{x} = h(\mathbf{y})$ eine **Variablensubstitution**, die das System

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$$

in das System

$$g(t,\, h(\mathbf{y}),\, \frac{dh}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}') = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$$

überführt.

Im Falle eine expliziten Systems

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$$

erhält man

$$\frac{dh}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}' = f(t, h(\mathbf{y}))$$

bzw. (sofern die Funktionalmatrix von h invertierbar ist)

$$y' = \left(\frac{dh}{d\mathbf{y}}\right)^{-1}(\mathbf{y}) \cdot f(t, h(\mathbf{y}))$$

Interpretiert man t als Parameter, so heißt jede Lösungskurve $\mathbf{x} = \varphi(t)$ einer Differentialgleichung **Trajektorie**. Die Menge aller Trajektorien eines Systems nennt man das **Phasenportrait** des Systems; der Raum, in dem die Trajektorien liegen, wird **Phasenraum** genannt.

Das Richtungsfeld expliziter Systeme erster Ordnung ist das durch das System bestimmte Vektorfeld, das die Tangentenrichtung der Lösungskurve angibt.

Einpunktige Trajektorien (die den konstanten Lösungen entsprechen) heißen auch **Gleichgewichtslagen** oder **stationäre Punkte**. Sie sind genau die singulären Punkte des Richtungsfeldes, d. h. jene Punkte $\mathbf{x}$, für die für alle t gilt: $f(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Eine Lösungskurve eines Differentialgleichungssystems kann entweder in **expliziter Form** ($\mathbf{x} = \varphi(t)$) oder in **impliziter Form** ($G(t, \mathbf{x}) = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$) dargestellt sein. Jede Funktion $F : (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, die als Komponente einer impliziten Lösungsdarstellung in Frage kommt (d. h. die für jede Lösung $\mathbf{x} = \varphi(t)$ konstant ist) heißt **erstes Integral** des Systems.

Das System von Integralgleichungen

$$\varphi_i(t) = \int_{t_0}^{t} f_i(u,\, \varphi_1(u),\, \ldots,\, \varphi_k(u))\, du + c_i$$

ist äquivalent zum Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ (f stetig) mit $c_i = x_i(t_0)$.

Jede Vorgabe eines Wertes $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ wird **Anfangsbedingung** genannt. Ein Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ zusammen mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ wird als **Anfangswertproblem** bezeichnet.

Eine gegebene explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x_1^{(n)} = f(t,\, x_1,\, \dot{x_1},\, \ldots,\, x_1^{(n-1)},\, x_2,\, \dot{x_2},\, \ldots,\, x_2^{(n)},\, \ldots,\, x_k,\, \dot{x_k},\, \ldots,\, x_k^{(n)})$$

kann unter der Festsetzung $x_{ij} := x_i^{(j-1)}$ in das äquivalente System erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{x_{1j}} = x_{1,j+1} & j = 1,\, \ldots,\, n-1 \\ \dot{x_{ij}} = x_{i,j+1} & i = 2,\, \ldots,\, k \quad j = 1,\, \ldots,\, n \\ \dot{x_{1n}} = f(t,\, x_{11},\, \ldots,\, x_{1n},\, x_{21},\, \ldots,\, x_{2,n+1},\, \ldots,\, x_{k1},\, \ldots,\, x_{k,n+1}) \end{cases}$$

umgewandelt werden. Eine zugehörige Anfangsbedingung bedeutet also die Angabe der Werte von $x_1,\, \dot{x_1},\, \ldots,\, x_1^{(n-1)},\, x_2,\, \dot{x_2},\, \ldots,\, x_2^{(n)},\, \ldots,\, x_k,\, \dot{x_k},\, \ldots,\, x_k^{(n)}$ an der Stelle t_0.

1.1 Approximative Lösungen

Hat man ein Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

gegeben, so kann man die zugehörige Lösungskurve auf verschiedene Arten approximieren. In allen Fällen wählt man eine **Schrittweite** $h > 0$ und setzt fest: $t_j := t_0 + j \cdot h$. Auf $[t_{j-1}, t_j]$ versucht man dann, die Lösungskurve möglichst gut durch eine Funktion ψ_j zu approximieren.

Beim **Polgonzugverfahren von Euler-Cauchy** wählt man zur Approximation das Geradenstück ausgehend vom Punkt $\psi_{j-1}(t_{j-1})$ mit dem Richtungsvektor $f(t_{j-1},\, \psi_{j-1}(t_{j-1}))$:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \mathbf{c} + (t - t_0) \cdot f(t_0, \mathbf{c}) && \text{auf } [t_0, t_1] \\ \psi_{j+1}(t) &= \psi_j(t_j) + (t - t_j) \cdot f(t_j, \psi_j(t_j)) && \text{auf } [t_j, t_{j+1}] \end{aligned}$$

Bei der **Approximation durch Taylorpolynome zweiten Grades** zieht man Parabelstücke, die man aus der Taylorapproximation gewinnt, zur Näherung heran:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \mathbf{c} + (t - t_0) \cdot f(t_0, \mathbf{c}) + \\ &\quad + \frac{(t - t_0)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, \mathbf{c}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0, \mathbf{c}) \cdot f_i(t_0, \mathbf{c}) \right) \quad \text{auf } [t_0, t_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{j+1}(t) &= \psi_j(t_j) + (t-t_j)\cdot f\Big(t_j, \psi_j(t_j)\Big) + \\ &+ \frac{(t-t_j)^2}{2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial t}\Big(t_j, \psi_j(t_j)\Big) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big(t_j, \psi_j(t_j)\Big)\cdot f_i\Big(t_j, \psi_j(t_j)\Big)\right) \qquad \text{auf } [t_j, t_{j+1}]\end{aligned}$$

Beim **Runge-Kutta-Verfahren** approximiert man (wie beim Euler-Cauchy-Verfahren) durch Polygonzüge, allerdings erhält man die Eckpunkte $(t_j, \psi_j(t_j))$ durch Approximation des Integrals in

$$\mathbf{x}(t_{j+1}) = \mathbf{x}(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, \mathbf{x}(t))\, dt$$

Die gebräuchlichste Methode basiert auf der Kepler'schen Fassregel, die liefert:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{j+1}) &\approx \mathbf{x}(t_j) + \frac{h}{6}\cdot\left(f\Big(t_j,\, \mathbf{x}(t_j)\Big) + 4\cdot f\left(t_j + \frac{h}{2}, \mathbf{x}\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right) + \right. \\ &\left. + f\Big(t_j + h,\, \mathbf{x}(t_j + h)\Big)\right)\end{aligned}$$

wobei die auf der rechten Seite unbekannten Werte unter Zuhilfenahme von

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{j+1} &= f\left(t_j + \frac{h}{2},\, \psi_j(t_j) + \frac{h}{2}\cdot f\Big(t_j,\, \psi_j(t_j)\Big)\right) \\ \mathbf{v}_{j+1} &= f\left(t_j + \frac{h}{2},\, \psi_j(t_j) + \frac{h}{2}\cdot \mathbf{u}_{j+1}\right) \\ \mathbf{w}_{j+1} &= f\Big(t_j + h,\, \psi_j(t_j) + h\cdot \mathbf{v}_{j+1}\Big)\end{aligned}$$

approximiert durch

$$\begin{aligned}f\left(t_j + \frac{h}{2}, \mathbf{x}\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right) &\approx \frac{\mathbf{u}_{j+1} + \mathbf{v}_{j+1}}{2} \\ f\Big(t_j + h,\, \mathbf{x}(t_j + h)\Big) &\approx \mathbf{w}_{j+1}\end{aligned}$$

Man erhält so

$$\begin{aligned}\psi_1(t_1) &= \mathbf{c} + \frac{h}{6}\cdot\Big(f(t_0, \mathbf{c}) + 2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1\Big) \\ \psi_{j+1}(t_{j+1}) &= \psi_j(t_j) + \frac{h}{6}\cdot\left(f\Big(t_j,\, \psi_j(t_j)\Big) + 2\mathbf{u}_{j+1} + 2\mathbf{v}_{j+1} + \mathbf{w}_{j+1}\right)\end{aligned}$$

Alle diese Verfahren sind jedoch im Allgemeinen nur bei kleiner Schrittweite und nicht allzu großen Intervallen um t_0 brauchbar.

1.2 Existenzsätze

Eine Funktion $f : (t, \mathbf{x}) \mapsto f(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$ erfüllt auf $V \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ eine **Lipschitzbedingung bezüglich x**, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gibt (die sogenannte **Lipschitzkonstante von f bezüglich x**), sodass gilt:

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \bar{\mathbf{x}})\| \leq \lambda \cdot \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \qquad \forall\, (t, \mathbf{x}),\, (t, \bar{\mathbf{x}}) \in V$$

Diese Eigenschaft besitzen speziell jene Funktionen, deren partielle Ableitungen nach $\mathbf{x}$ beschränkt bleiben.

Mit dieser Definition erhält man mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach den **Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf**: Ist die Funktion $f : (t, \mathbf{x}) \mapsto f(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$ auf einer Umgebung V von $(t_0, \mathbf{c})$ stetig und erfüllt f dort eine Lipschitzbedingung bezüglich $\mathbf{x}$, so hat das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ in einer Umgebung von t_0 genau eine Lösung.

Man erhält auch ein Verfahren zur **sukzessiven Approximation** der Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ mittels

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \mathbf{c} \\ \varphi_{n+1}(t) &= \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi_n(u))\, du + \mathbf{c} \end{aligned}$$

deren Konvergenz auf dem Intervall $[a, b]$ um t_0 unter folgenden Voraussetzungen gesichert ist:

(1) f ist stetig auf $[a, b] \times \overline{K_r(\mathbf{c})} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$

(2) f erfüllt auf $[a, b] \times \overline{K_r(\mathbf{c})}$ eine Lipschitzbedingung bezüglich $\mathbf{x}$ mit Lipschitzkonstante λ

(3) $\max(b - t_0, t_0 - a) \cdot \lambda < 1$

(4) $b - t_0 \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{\lambda r}{M(t_0, b, \mathbf{c})} + 1\right) \qquad \wedge \qquad t_0 - a \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{\lambda r}{M(a, t_0, \mathbf{c})} + 1\right)$

bzw. einfacher, aber mit größerer Einschränkung

$b - t_0 \leq \frac{r}{M(t_0, b, \mathbf{c}) + r\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{M(t_0, b, \mathbf{c})}{M(t_0, b, \mathbf{c}) + r\lambda}\right) \quad \wedge$

$t_0 - a \leq \frac{r}{M(a, t_0, \mathbf{c}) + r\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{M(a, t_0, \mathbf{c})}{M(a, t_0, \mathbf{c}) + r\lambda}\right)$

(wobei $M(a, b, \mathbf{c}) := \max\limits_{[a,b] \times \{\mathbf{c}\}} \|f\|$)

Man erhält folgende **Fehlerabschätzung** für den Fehler beim Ersetzen der tatsächlichen Lösung φ durch die k-te Approximationslösung φ_k:

$$\|\varphi(t) - \varphi_k(t)\| \leq M(t_0, t, \mathbf{c}) \cdot \frac{\lambda^k \cdot |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{\lambda |t - t_0|}$$

bzw. einfacher, aber ungenauer

$$\|\varphi(t) - \varphi_k(t)\| \leq M(t_0, t, \mathbf{c}) \cdot \frac{\lambda^k \cdot |t - t_0|^{k+1}}{1 - \lambda \cdot |t - t_0|}$$

Die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ aus einer Menge M von Funktionen heißen auf $[a, b]$ **gleichgradig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von $f \in M$ und $t, \bar{t} \in [a, b]$ unabhängiges $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt mit

$$\|f(t) - f(\bar{t})\| < \varepsilon \qquad \forall\, f \in M \quad \forall\, t, \bar{t} \in [a, b] \text{ mit } |t - \bar{t}| < \delta(\varepsilon)$$

Der **Satz von Arzelà und Ascoli** lautet dann, dass eine auf $[a, b]$ gleichmäßig beschränkte Folge $\{f_n\}$ von auf $[a, b]$ gleichgradig stetigen Funktionen mindestens eine auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält.

Mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli kann man dann den **Existenzsatz von Peano** beweisen: Ist f eine in einer Umgebung von $(t_0, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^k$ stetige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^k$, so hat das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ in einer Umgebung von t_0 mindestens eine Lösung.

1.3 Maximale Intervall-Lösungen

Eine Funktion $f : X \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$ erfüllt auf X eine **lokale Lipschitzbedingung bezüglich x**, wenn es zu jedem Punkt aus X eine Umgebung gibt, auf der f eine Lipschitzbedingung bezüglich $\mathbf{x}$ erfüllt.

Mit dieser Definition erhält man, dass jedes Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ mit auf dem Gebiet X stetiger Funktion f und $(t_0, \mathbf{c}) \in X$ mindestens eine Lösung besitzt, die maximal ist bezüglich $\Gamma_f \subseteq X$. Erfüllt f auf X zusätzlich eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich $\mathbf{x}$, so ist diese maximale Lösung sogar eindeutig.

Jede maximale Lösung in X hat ein offenes Definitionsintervall (a, b), wobei für a und b (unabhängig voneinander) folgende Fälle möglich sind:

(1) $a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$

(2) a bzw. b ist Unbeschränktheitsstelle der betrachteten Lösungsfunktion

(3) die betrachtete Lösungskurve $(\varphi, (a, b))$ erreicht bei $t = a$ bzw. $t = b$ den Rand von X

2 Elementare Lösungsmethoden

2.1 Direkte Methoden

Eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$$

kann man durch sogenannte **Trennung der Variablen** lösen und erhält

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt + c$$

sofern $\frac{1}{g}$ und f Stammfunktionen besitzen.

Gleichungen der Gestalt

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

nennt man **Euler-homogen**. Diese kann man durch die Substitution $y = \frac{x}{t}$ und anschließender Trennung der Variablen lösen:

$$\dot{y} = \frac{f(y) - y}{t} \quad \Rightarrow \quad \ln|t| = \int \frac{dy}{f(y) - y} + c$$

Ist $f(y)$ identisch y, so ist die ursprüngliche Gleichung $\dot{x} = \frac{x}{t}$ direkt durch Trennung der Variablen lösbar; die Stellen mit $f(y) = y$ müssen jedoch gesondert untersucht werden.

Differentialgleichungen der Gestalt

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right)$$

können auch immer auf die folgende Art gelöst werden:

1. Fall: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$:

Substitution $t = u + p$, $x = v + q$ (p und q so gewählt, dass die konstanten Glieder wegfallen) liefert die Euler-homogene Gestalt

$$\dot{v}(u) = f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right) = f\left(\frac{a + b \cdot \frac{v}{u}}{\alpha + \beta \cdot \frac{v}{u}}\right)$$

2. Fall: $b = \beta = 0$

Lösen durch Trennung der Variablen

3. Fall: $a = \alpha = 0$

Lösen durch Trennung der Variablen

4. Fall: sonst

Substitution $y = \alpha t + \beta x$ liefert die Gleichung

$$\dot{y} = \alpha + \beta \cdot f\left(\frac{\lambda y + c}{y + \gamma}\right)$$

die man durch Trennung der Variablen lösen kann.

Eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\dot{x} = a(t) \cdot x + b(t)$$

wird **lineare Differentialgleichung** genannt. Ist $b(t) = 0$, so spricht man von einer **homogenen**, andernfalls von einer **inhomogenen** linearen Differentialgleichung. Die Funktionen $a(t)$ bzw. $b(t)$ heißen **Koeffizient** bzw. **Störfunktion** oder **Inhomogenität**.

Ist I das maximale Stetigkeitsintervall von a und b um t_0, so hat das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = a(t) \cdot x + b(t), \quad x(t_0) = c$$

in $I \times \mathbb{R}$ genau eine maximale Intervall-Lösung, die auf ganz I definiert ist.

Homogene lineare Differentialgleichungen kann man stets durch Trennung der Variablen lösen:

$$\dot{x} = a(t) \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = c \cdot e^{\int a(t)\,dt}$$

Hat man eine inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t) \cdot x + b(t)$$

zu lösen, so bestimmt man zunächst die allgemeine Lösung x_h der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung und addiert sodann eine spezielle Lösung x_p (eine sogenannte **partikuläre Lösung**) der inhomogenen Gleichung.

Eine partikuläre Lösung kann über die **Methode der Variation der Konstanten** gefunden werden:

> Der Ansatz $x_p = c(t) \cdot x_h = c(t) \cdot e^{\int a(t)\,dt}$ liefert (durch Einsetzen in die inhomogene Gleichung) die Gleichung
>
> $$\dot{c}(t) = \frac{b(t)}{e^{\int a(t)\,dt}}$$
>
> für $\dot{c}(t)$, aus der man $c(t)$ (und damit x_p) berechnen kann.

Differentialgleichungen der Gestalt

$$\dot{x} = g(t) \cdot x + h(t) \cdot x^s$$

werden **Bernoulli-Differentialgleichungen** genannt. Diese sind durch die Substitution $y = x^{1-s}$ in eine lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = (1-s) \cdot x^{-s} \cdot \dot{x} = (1-s) \cdot g(t) \cdot y + (1-s) \cdot h(t)$$

transformierbar. Für positives s erhält man (außer den Lösungen der linearen Differentialgleichung) auch noch die Lösung $x = 0$.

Gleichungen der Gestalt

$$\dot{x} = g(t) \cdot x + h(t) \cdot x^2 + k(t)$$

heißen **Riccati-Differentialgleichungen**. Diese sind jedoch im Allgemeinen nicht elementar lösbar. „Errät“ man allerdings eine spezielle Lösung $\varphi(t)$, so erhält man alle Lösungen, indem man φ zu den Lösungen der Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{y} = \Big(g(t) + 2\varphi(t)h(t)\Big) \cdot y + h(t) \cdot y^2$$

addiert.

2.2 Parametrisierung

Hat y' an jeder Stelle einer Lösungskurve der Differentialgleichung $g(x, y, y') = 0$ einen anderen Wert, so kann man für eine Durchlaufung dieser Kurve y' als Parameter wählen. Mit dem Ansatz $y' = p$, $x = x(p)$ und $y = y(p)$ erhält man schließlich

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(p) & = & p \cdot \dot{x}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \dot{x}(p) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \dot{y}(p) + \frac{\partial g}{\partial y'} & = & 0 \end{array} \right.$$

bzw.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(p) & = & \dfrac{-\frac{\partial g}{\partial y'}}{\frac{\partial g}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial g}{\partial y}} \Big(x(p),\, y(p),\, p \Big) \\ \dot{y}(p) & = & \dfrac{-p \cdot \frac{\partial g}{\partial y'}}{\frac{\partial g}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial g}{\partial y}} \Big(x(p),\, y(p),\, p \Big) \end{array} \right.$$

Tritt in der Gleichung für $\dot{x}(p)$ die Funktion $y(p)$ nicht explizit auf, so ist diese Gleichung eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung für $x(p)$, aus deren Lösung man durch $\dot{y}(p) = p \cdot \dot{x}(p)$ mittels Integration $y(p)$ gewinnt (analog mit vertauschten Rollen).
Im Allgemeinen werden so allerdings nicht alle Lösungen erfasst.

Bei Gleichungen des Typs

$$y = f(x, y') \qquad \text{bzw.} \qquad x = f(y, y')$$

erhält man

$$\dot{x}(p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y'}}{p - \frac{\partial f}{\partial x}}(x,\, p) \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{y}(p) = \frac{p \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}}{1 - p \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}(y,\, p)$$

wobei $\dot{x}(p)$ bzw. $\dot{y}(p)$ jeweils nur von p und $x(p)$ bzw. $y(p)$ anhängen.

Spezialfälle dieser Art von Gleichungen sind:

(1) $x = f(y')$, was zum System

$$\begin{array}{rcl} x(p) & = & f(p) \\ \dot{y}(p) & = & p \cdot \dot{x}(p) \end{array}$$

mit der Lösung

$$\begin{array}{rcl} x & = & f(p) \\ y & = & \displaystyle\int p \cdot \dot{f}(p)\, dp + c \end{array}$$

führt.
Man erhält so sogar alle Lösungen.

(2) $y = xy' + g(y')$ **(Clairaut-Differentialgleichungen)**:
Man erhält das System

$$\begin{aligned} y(p) &= p \cdot x(p) + g(p) \\ \dot{y}(p) &= p \cdot \dot{x}(p) \end{aligned}$$

was (falls $g(p)$ nicht die Gestalt $\alpha p + \beta$ hat) zur Lösung

$$\begin{aligned} x(p) &= -\dot{g}(p) \\ y(P) &= -p \cdot \dot{g}(p) + g(p) \end{aligned}$$

führt. Darüber hinaus sind alle Geraden $y = cx + g(c)$ Lösungskurven. Durch Zusammensetzen von Teilen dieser Lösungskurven erhält man alle Lösungen.

(3) $y = x \cdot f(y') + g(y')$ **(D'Alembert-Differentialgleichungen)**:
Man erhält das System

$$\begin{aligned} y(p) &= f(p) \cdot x(p) + g(p) \\ \dot{y}(p) &= p \cdot \dot{x}(p) \end{aligned}$$

was (für $f(p) \neq p$) zur linearen Differentialgleichung

$$\dot{x}(p) = \frac{\dot{f}(p)}{p - f(p)} \cdot x(p) + \frac{\dot{g}(p)}{p - f(p)}$$

führt. Ist an einer Stelle p_0 $f(p_0) = p_0$, so gewinnt man die Gerade $y = p_0 x + g(p_0)$ als Lösungskurve. In diesem Fall können weitere Lösungen existieren, allerdings keine Geraden.

Durch die Festsetzung $\dot{x}(t) = p(x)$ erhält man aus der autonomen Differentialgleichung

$$g(x, \dot{x}, \ldots, x^{(k)}) = 0 \qquad \text{(Ordnung } k\text{)}$$

die (nicht autonome) Gleichung

$$g(x, p, p'p, p''p + p'^2, \ldots) = 0 \qquad \text{(Ordnung } k-1\text{)}$$

Kann man daraus $p(x)$ bestimmen, so erhält man durch Trennung der Variablen die implizite Lösungsdarstellung

$$t = \int \frac{dx}{p(x)} + c$$

Mit diesem Verfahren werden allerdings nur streng monotone Lösungen erfässt.

2.3 Exakte Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Gestalt

$$a_1(\mathbf{x})\dot{x}_1 + \ldots + a_k(\mathbf{x})\dot{x}_k = 0$$

bzw.

$$a_1(\mathbf{x})\,dx_1 + \ldots + a_k(\mathbf{x})\,dx_k = 0$$

heißen **exakt**, wenn die zugehörige Differentialform $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i(\mathbf{x})\,dx_i$ eine Stammfunktion hat.

Die Trajektorien einer derartigen Differentialgleichung erfüllen die Gleichung $F(x_1, \ldots, x_k) = c$, wobei F eine Stammfunktion der Differentialform $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} a_i(\mathbf{x})\,dx_i$ ist, und c gewissen Einschränkungen unterworfen sein kann.

Jedes System von $k-1$ exakten Differentialgleichungen liefert auf diese Weise eine implizite Darstellung der Trajektorie, sofern die Koeffizientenfunktionen der Gleichung stetig und ihre Matrix vollen Rang $(k-1)$ hat.

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_j(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar, so ist eine Gleichung der obigen Gestalt genau dann exakt, wenn $d\omega = 0$ ist, d. h. wenn die Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial\, a_i}{\partial\, x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial\, a_j}{\partial\, x_i}(\mathbf{x})$ $(1 \leq i < j \leq k)$ gelten.

Hat man nun eine nicht exakte Differentialgleichung

$$a_1(\mathbf{x})\,dx_1 + \ldots + a_k(\mathbf{x})\,dx_k = 0$$

gegeben, so kann man versuchen, diese durch Multiplikation mit einer Funktion $M(\mathbf{x})$ exakt zu machen. Jede Funktion $M(\mathbf{x})$, die das leistet, nennt man einen **integrierenden Faktor** oder **Euler-Multiplikator**.

Ist $M(\mathbf{x})$ ein integrierender Faktor, so sind die Lösungen der erhaltenen exakten Differentialgleichung

$$M(\mathbf{x}) \cdot a_1(\mathbf{x})\,dx_1 + \ldots + M(\mathbf{x}) \cdot a_k(\mathbf{x})\,dx_k = 0$$

entweder Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung oder Nullstellen von $M(\mathbf{x})$ (oder beides). Man erhält sogar alle Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung mit Ausnahme jener, für die $M(\mathbf{x})$ nicht definiert ist (falls solche überhaupt existieren).

Das Suchen von integrierenden Faktoren ist jedoch meist ein eher mühseliges Unterfangen, weshalb man üblicherweise **Faktoren spezieller Gestalt** heranzieht:

(1) $\boldsymbol{M(x_i)}$**:**
Man erhält über die Integrabilitätsbedingung

$$\ln|M(x_i)| = \int \frac{M'(x_i)}{M(x_i)}\,dx_i = \int \frac{\frac{\partial\, a_i}{\partial\, x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial\, a_j}{\partial\, x_i}(\mathbf{x})}{a_j(\mathbf{x})}\,dx_i$$

wobei ein derartiger integrierender Faktor nur dann existiert, wenn der rechts stehende Integrand für alle $j \neq i$ gleich ist und nur von x_i abhängt. Außerdem müssen alle Integrabilitätsbedingungen, bei denen *nicht* nach x_i differenziert wird, bereits von vornherein erfüllt sein.

(2) $\boldsymbol{M(f(x_1, \ldots, x_k))}$**:**
In diesem Fall nimmt man für die Funktion f eine spezielle Gestalt (z. B. $f(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + \ldots + x_k$ oder $f(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$) und erhält aus den Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{M'}{M} \circ f = \frac{\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot a_j - \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot a_i}$$

(sofern die rechte Seite für alle Paare (i, j) mit $i \neq j$ gleich ist und die Gestalt $G(f(x_1, \ldots, x_k))$ hat)

$$\ln |M(z)| = \int \frac{M'}{M}(z)\, dz = \int G(z)\, dz$$

Hat man ein autonomes System $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ gegeben, so erhält man daraus ein System von Differentialgleichungen der Form

$$f_i(\mathbf{x})\, dx_j - f_j(\mathbf{x})\, dx_i = 0$$

zu denen man (sofern die Gleichungen exakt sind oder sich durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor exakt machen lassen) ein erstes Integral F finden kann, das dann auch ein erstes Integral des Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ ist (d. h. $F(\mathbf{x}) = c$ ist eine Gleichung für dessen Trajektorien).

2.4 Differentialgleichungen und Kurvenscharen

Ordnet man gewissen Parameterwerten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ jeweils eine Kurve in $\mathbb{R}^k$ zu, so erhält man eine m-parametrige **Kurvenschar**, die beispielsweise mittels der Durchlaufung

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{x} = f(t, \mathbf{a}) \\ \text{bzw.} & F(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k \end{array} \qquad x \in \mathbb{R}^k,\ t \in R,\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$$

oder in der impliziten Form

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k-1} \qquad x \in \mathbb{R}^k,\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$$

beschrieben werden kann.

Eine Differentialgleichung, für die sämtliche Kurven einer gegebenen Kurvenschar Lösungskurven (im Falle einer Schar in Durchlaufungsform) bzw. Trajektorien (im Fall einer implizit definierten Schar) sind, heißt **Differentialgleichung einer Kurvenschar**.

Ist die Kurvenschar durch $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ gegeben, so erhält man die Differentialgleichung der Schar durch Elimination von $\mathbf{a}$ aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & F_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 \\ & \tfrac{\partial F_i}{\partial t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{k} \tfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \cdot \dot{x}_j(t) = 0 \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, k$$

bzw. im Fall einer impliziten Schar $F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k-1}$ durch Elimination von $\mathbf{a}$ aus dem System

$$\begin{aligned} & F_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 \\ & \sum_{j=1}^{k} \tfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \cdot dx_j = 0 \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, k-1$$

Kurven, längs derer das Richtungsfeld einer Differentialgleichung konstant ist, nennt man **Isokline**. Bei Gleichungen der Form $F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ ($t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$) sind sie implizit definiert durch $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$; bei expliziten Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ können sie durch $f(t, \mathbf{x}) = \mathbf{a}$ beschrieben werden.

Hat man eine Kurvenschar gegeben, so nennt man alle Kurven, die an jedem Schnittpunkt mit einer Scharkurve zu dieser orthogonal sind (d. h. die Tangente in diesem Punkt steht normal auf die Tangente der Scharkurve in diesem Punkt), **orthogonale Trajektorien**.

Hat eine Differentialgleichung einer Kurvenschar noch weitere Lösungen außer den Scharkurven, so haben diese an jedem Schnittpunkt mit einer Scharkurve dieselbe Tangente, d. h. die beiden Kurven **berühren einander**.

Berührt eine Kurve K in jedem ihrer Punkte mindestens eine von K verschiedene Scharkurve, und berührt K außerdem jede Scharkurve (zumindest in einem Punkt), so heißt K **Einhüllende** der Kurvenschar.

Jede Einhüllende einer Lösungsschar einer Differentialgleichung (oder einer Teilschar davon) ist ebenfalls eine Lösungskurve der Differentialgleichung; dasselbe gilt für alle aus Teilen von Scharkurven und Teilen der Einhüllenden zusammengesetzten differenzierbaren Kurven.
Sofern die Kurvenschar bereits ein ganzes Gebiet G ausfüllt, sind dies sogar alle Lösungskurven der Differentialgleichung in G.

Hat man nun eine $(k-1)$-parametrige Kurvenschar $F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k-1}$ gegeben, so erhält man (sofern F stetig differenzierbar ist)

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k-1} \\ \det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) &= 0 \end{aligned}$$

als notwendige Bedingung für die Einhüllende, was durch Elimination von $\mathbf{a}$ bzw. Darstellung von $\mathbf{x}$ als Funktion von $\mathbf{a}$ eine Gleichung bzw. eine Durchlaufungsdarstellung, der die Punkte der Einhüllenden genügen, liefert.

Im Fall $k > 2$ erhält man so allerdings nur eine Hyperfläche, auf der die Einhüllende (sofern sie überhaupt existiert) liegen muss. Nur für $k = 2$ liefert das eine implizite Darstellung bzw. eine Durchlaufung einer Kurve, auf der die Punkte der Einhüllenden der Schar (bzw. einer Teilschar) sowie die singulären Punkte (x, y) der Darstellung (d. h. Punkte mit $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, a) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, a) = 0$) liegen. Diese singulären Punkte könnten nun ebenfalls zur Einhüllenden gehören, müssen allerdings nicht. Dies muss jeweils im konkreten Fall entschieden werden; für die Bestimmung der (Halb-)Tangentenrichtung in singulären Punkten sei hierbei auf Analysis III verwiesen.

3 Lineare Differentialgleichungen

3.1 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Systeme der Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

heißen **Systeme linearer Differentialgleichungen (erster Ordnung)**.

Analog zum eindimensionalen Fall wird die (im Allgemeinen von t abhängige) Matrix A **Koeffizientenmatrix** und die Funktion $\mathbf{b}$ die **Störfunktion** oder **Inhomogenität** des Systems genannt. Ebenso spricht man von einem **homogenen System**, sofern $\mathbf{b}$ die Nullfunktion ist, sonst von einem **inhomogenen System**.

Das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ hat auf $I \times \mathbb{R}^k$ (I ist das maximale Stetigkeitsintervall von $A(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ um t_0) eine eindeutig bestimmte maximale Intervall-Lösung.

Für k Funktionen $\varphi_{(1)}, \ldots, \varphi_{(k)}$ von I (I Intervall) nach $\mathbb{R}^k$ wird die Matrix mit den Spalten $\varphi_{(1)}, \ldots, \varphi_{(k)}$ **Wronski-Matrix** und ihre Determinante **Wronski-Determinante** genannt.

Sei $A(t)$ eine $k \times k$-Matrix von auf I (I Intervall) stetigen Funktionen. Die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x}$ bilden dann einen k-dimensionalen Vektorraum $L(I)$.

Für die Wronski-Determinante $D(t)$ von $\varphi_{(1)}, \ldots, \varphi_{(k)} \in L(I)$ gilt dann:

(1) $D(t) = D(t_0) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} (\operatorname{sp} A)(u)\, du\right) \qquad \forall\, t_0, t \in I$

(2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (a) $\varphi_{(1)}, \ldots, \varphi_{(k)}$ bilden eine Lösungsbasis

   (b) $D(t_0) \neq 0 \quad$ für ein $t_0 \in I$

   (c) $D(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in I$

Hat man eine Lösungsbasis des Systems $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x}$ gefunden, so lautet die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$

$$\varphi(t) = W(T) \cdot W^{-1}(t) \cdot \mathbf{c}$$

wobei $W(t)$ die Wronski-Matrix der Lösungsbasis bezeichnet.

Das **Reduktionsverfahren von D'Alembert** hilft bei der Suche nach Lösungsbasen von linearen Differentialgleichungssystemen $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x}$ für $k > 1$:

Hat man eine (von der Nullfunktion verschiedene) Lösung $\mathbf{x} = \varphi(t)$ gefunden, so kann man jede weitere Lösung $\psi(t)$ darstellen durch $\psi(t) = c(t) \cdot \varphi(t) + \tau(t)$ mit $c(t) \in \mathbb{R}$ und $\tau : I \to \mathbb{R}^k$.

Sei nun o. B. d. A. $\varphi_1(t) \neq 0$, so setzt man $c(t) := \frac{\psi_1(t)}{\varphi_1(t)}$, was $\tau_1 = 0$ liefert. Durch Einsetzten von $\psi(t) = c(t) \cdot \varphi(t) + \tau(t)$ in die ursprüngliche Gleichung erhält man (durch Betrachten der ersten Komponente) eine Gleichung für $\dot{c}(t)$, woraus man (durch Einsetzen in die anderen Komponenten) schließlich ein lineares Differentialgleichungssystem für $\tau_2, \ldots, \tau_k$ (d. h. mit niedrigerer Dimension) erhält.

Kann man nun eine Lösungsbasis $\tau_{(1)}, \ldots, \tau_{(k-1)}$ des neuen Systems finden, so bildet

$$\varphi(t),\ c_{(1)}(t) \cdot \varphi(t) + \tau_{(1)}(t),\ \ldots,\ c_{(k-1)}(t) \cdot \varphi(t) + \tau_{(k-1)}(t)$$

eine Lösungsbasis des ursprünglichen Systems.

Inhomogene Systeme löst man analog zum eindimensionalen Fall: Man erhält alle Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, indem man zu einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems die allgemeine Lösung des homogenen Systems addiert.

Eine **partikuläre Lösung** liefert hier wieder die **Variation der Konstanten**: Ist $W(t)$ die Wronski-Matrix einer Lösungsbasis des homogenen Systems, so liefert Einsetzen von $\psi(t) = W(t) \cdot \sigma(t)$ in das inhomogene System die Gleichung $\sigma(t) = \int W^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t)\, dt$ und damit $\mathbf{x}_p = W(t) \cdot \int W^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t)\, dt$ bzw. (sofern $\mathbf{b}(t)$ das homogene System löst) $\mathbf{x}_p = t \cdot \mathbf{b}(t)$.

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

lautet also

$$\varphi(t) = W(T) \cdot W^{-1}(t_0) \cdot \mathbf{c} + W(t) \cdot \int_{t_0}^{t} W^{-1}(u) \cdot \mathbf{b}(u)\, du$$

Sind alle Koeffizientenfunktionen von $A(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ auf einem Intervall I um t_0 in Potenzreihen entwickelbar, so kann man auch die **Potenzreihenmethode** zur Lösung eines Anfangswertproblems heranziehen: Man setzt alle Komponenten der Lösungsfunktion φ unbestimmt als Potenzreihe an, setzt in die Differentialgleichungen ein und versucht, die unbekannten Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen.

3.2 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine Gleichung der Gestalt

$$a_n(t) \cdot x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot \dot{x} + a_0(t) \cdot x = b(t)$$

nennt man **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**. Durch die Festsetzung $x_i = x^{(i-1)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ kann diese in ein äquivalentes System erster Ordnung transformiert werden, für das dann die Theorie aus Abschnitt 3.1 zur Anwendung kommen kann. Durch die spezielle Gestalt der Gleichungen ergeben sich jedoch einige Vereinfachungen:

Die Wronski-Matrix einer Lösungsbasis $\psi_{(1)}, \ldots, \psi_{(n)}$ hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \varphi_{(1)} & \varphi_{(2)} & \cdots & \varphi_{(n)} \\ \dot{\varphi}_{(1)} & \dot{\varphi}_{(2)} & \cdots & \dot{\varphi}_{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{(1)}^{(n-1)} & \varphi_{(2)}^{(n-1)} & \cdots & \varphi_{(n)}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

und wird **Wronski-Matrix n-ter Ordnung**, ihre Determinante **Wronski-Determinante n-ter Ordnung** genannt.

Das **Reduktionsverfahren** wird im Allgemeinen ein bisschen verändert, da das Verfahren von D'Alembert unter Umständen kein (entsprechend einfaches) zu einem System $(n-1)$-ter Ordnung äquivalentes Differentialgleichungssystem liefern wird und damit unnötig kompliziert ist. Man sucht weiterhin eine Lösung φ der (homogenen) Gleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot \dot{x} + a_0(t) \cdot x = 0$$

und stellt anschließend jede weiter Lösung ψ durch $\psi(t) = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \cdot \varphi(t) = \sigma(t) \cdot \varphi(t)$ dar und setzt in das ursprüngliche Gleichungssystem ein, was dann

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_i(t) \cdot \binom{i}{j} \cdot \varphi^{(i-j)}(t) \right) \cdot \sigma^{(j)}(t) = 0$$

bzw. durch die Festsetzung $\tau = \dot{\sigma}$ die lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_i(t) \cdot \binom{i}{j} \cdot \varphi^{(i-j)}(t) \right) \cdot \tau^{(j-1)}(t) = 0$$

für τ liefert. Kann man nun eine Lösungsbasis $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ finden, so berechnet man daraus $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ und erhält $\varphi, \sigma_1 \cdot \varphi, \ldots, \sigma_{n-1} \cdot \varphi$ als Lösungsbasis des ursprünglichen Systems.

Ist $\psi_{(1)}, \ldots, \psi_{(n)}$ eine Lösungsbasis des homogenen Systems, so liefert die **Variation der Konstanten** die **partikuläre Lösung**

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t) \cdot \psi_{(i)}(t)$$

wobei die Koeffizienten σ_i entweder aus der Gleichung

$$W(t) \cdot \dot{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b(t) \end{pmatrix}^T$$

oder über die Formel

$$\dot{\sigma}_i(t) = \frac{(-1)^{n+i} \cdot b(t) \cdot D_i(t)}{D(t)}$$

bestimmt werden, wobei $D_i(t)$ die Wronski-Determinante $(n-1)$-ter Ordnung von $\psi_{(1)}, \ldots, \psi_{(i-1)}, \psi_{(i+1)}, \ldots, \psi_{(n)}$ ist.

Die **Potenzreihenmethode** vereinfacht sich dahingehend, dass nur noch eine einzige Potenzreihe – jene für x – unbestimmt anzusetzen ist.

3.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Man kann mit Hilfe der **Matrizenexponentialfunktion**

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$$

mit den **Rechenregeln**

(1) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ (sofern $A \cdot B = B \cdot A$)

(2) $e^0 = E$

(3) $e^A \cdot e^{-A} = E$, d. h. e^A ist regulär $\forall\, A \in K^{n \times n}$

(4) $e^{T^{-1} \cdot A \cdot T} = T^{-1} \cdot e^A \cdot T$

(5) $B \cdot e^A = e^A \cdot B$ (sofern $A \cdot B = B \cdot A$)

die Lösung $\mathbf{x} = \varphi(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ bestimmen:

$$\mathbf{x} = e^{(t-t_0) \cdot A} \cdot \mathbf{c} = e^{tA} \cdot \underbrace{e^{-t_0 A} \cdot \mathbf{c}}_{= \mathbf{x}(0)}$$

Das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ ist also äquivalent zum Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = e^{-t_0 A} \cdot \mathbf{c}$. Der Übergang vom Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ auf $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ erfolgt durch Multiplikation der Lösung mit der **Übergangsmatrix** $e^{t_0 A}$.

Indem man $e^{-t_0 A} \cdot \mathbf{c}$ eine Basis von $\mathbb{R}^k$ – speziell die kanonische Basis – durchlaufen lässt, stellt man fest, dass man die Spalten von e^{tA} als Lösungsbasis des (homogenen) Systems $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$ verwenden kann.

Stellt man nun Überlegungen zur linearen Variablentransformation an, so kann man zeigen, dass auch die Spalten von $T \cdot e^{tJ}$ eine Lösungsbasis bilden, wobei

J die Jordan-Normalform von A und T die zugehörige Transformationsmatrix ($A = T \cdot J \cdot T^{-1}$) ist.

Damit reduziert sich das Problem der **Berechnung von $\boldsymbol{e^{tJ}}$** auf Matrizen J in Jordan-Normalform, wobei man sich hier wiederum auf die einzelnen Jordan-Kästchen konzentrieren kann:

Ist J von der Gestalt

$$J = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_n)$$

wobei B_i $(i = 1, \ldots, n)$ Jordan-Kästchen der Größe p_i sind, so gilt:

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}(e^{tB_1}, \ldots, e^{tB_n})$$

mit

(1) Ist $B_i = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$, so gilt:

$$e^{tB_i} = \operatorname{diag}(e^{\lambda t}, \ldots, e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \cdot E_{p_i}$$

(2) Ist $B_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, so gilt:

$$e^{tB_i} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Basis des reellen Lösungsraumes des (homogenen) Systems $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$ erhält man dann, indem man Real- und Imaginärteil des Spalten der Matrix $T \cdot e^{tJ}$ trennt.

Man kann zur Berechnung der reellen Lösungsbasis auch die reelle Jordan-Normalform heranziehen: Hat die Matrix A r reelle und $2s$ komplexe Eigenwerte, so betrachtet man die ersten $r + s$ Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} Re\, T & -Im\, T \\ Im\, T & Re\, T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Re\, e^{tJ} & -Im\, e^{tJ} \\ Im\, e^{tJ} & Re\, e^{tJ} \end{pmatrix}$$

Die Realteile (= „obere Hälften") und die von $\mathbf{0}$ verschiedenen Imaginärteile (= „untere Hälften") bilden dann die (reelle) Lösungsbasis.

Hat man ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$ mit singulärer Matrix A gegeben, so bestimmt man zuerst eine nichttriviale Lösung

$\mathbf{c}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, die gleichzeitig auch eine nichttriviale konstante Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Schließlich wendet man das D'Alembert-Reduktionsverfahren an, dass ein System mit konstanten Koeffizienten niedrigerer Ordnung liefert.

Hat man ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ gegeben, so erhält man eine partikuläre Lösung mittels

$$\varphi_p(t) = T \cdot e^{tJ} \cdot \int e^{-tJ} \cdot T^{-1} \cdot \mathbf{b}(t)\, dt$$

wobei J wieder die Jordan-Normalform von A und T die zugehörige Transformationsmatrix bezeichne.

Oft ist es jedoch auch günstig, $\mathbf{b}(t)$ als Linearkombination von Funktionen verschiedener „Bauart“ aufzufassen:

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \cdot \mathbf{b}_j(t)$$

Kann man nämlich eine partikuläre Lösung $\varphi_{(j)}$ von $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_j(t)$ finden, so ist

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \cdot \varphi_{(j)}(t)$$

eine partikuläre Lösung des ursprünglichen Systems.
Man erhält folgende Tabelle:

$\mathbf{b}(t)$	**Partikuläre Lösung von $\dot{x} = A \cdot \mathrm{x} + \mathbf{b}(t)$**	
$e^{at} \cdot \mathbf{c}$	$e^{at} \cdot (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$	falls a nicht Eigenwert von A ist
$t^n \cdot \mathbf{c}$	$(p_1(t), \ldots, p_k(t))$	wobei: $p_i(t)$ Polynom, $[p_i] \leq n$ falls 0 nicht Eigenwert von A ist
$\sin at \cdot \mathbf{c}$ $\cos at \cdot \mathbf{c}$	$\sin at \cdot \vec{\sigma} + \cos at \cdot \vec{\tau}$	falls $a \cdot i$ nicht Eigenwert von A ist
$\sinh at \cdot \mathbf{c}$ $\cosh at \cdot \mathbf{c}$	$\sinh at \cdot \vec{\sigma} + \cosh at \cdot \vec{\tau}$	falls weder a noch $-a$ Eigenwert von A ist

3.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für derartige Differentialgleichungen

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b(t)$$

kann natürlich auch die Theorie aus Abschnitt 3.3 angewandt werden, allerdings ergeben sich wieder einige Vereinfachungen:
Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

und (wenn λ_j die Nullstellen mit Vielfachheit v_j bezeichnen)

$$e^{\lambda_j t},\ t \cdot e^{\lambda_j t},\ \ldots,\ t^{v_j-1} \cdot e^{\lambda_j t}$$

eine (komplexe) Lösungsbasis der homogenen Gleichung. Eine reelle Lösungsbasis wird von den Funktionen

$$\begin{array}{cl} e^{\lambda_j t},\ t \cdot e^{\lambda_j t},\ \ldots,\ t^{v_j-1} \cdot e^{\lambda_j t} & (\lambda_j \text{ reell}) \\ \begin{array}{c} e^{(Re\,\lambda_j)t} \cdot \cos(Im\,\lambda_j)t,\ \ldots,\ t^{v_j-1} \cdot e^{(Re\,\lambda_j)t} \cdot \cos(Im\,\lambda_j)t \\ e^{(Re\,\lambda_j)t} \cdot \sin(Im\,\lambda_j)t,\ \ldots,\ t^{v_j-1} \cdot e^{(Re\,\lambda_j)t} \cdot \sin(Im\,\lambda_j)t \end{array} & (\lambda_j \text{ komplex}) \end{array}$$

gebildet.

Oft hilft bei inhomogenen Gleichungen der **Exponentialansatz** weiter: Eine inhomogene Gleichung der Gestalt

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = p(t) \cdot e^{ct} \qquad (p(t) \text{ Polynom})$$

hat eine Lösung der Gestalt

$$t^v \cdot q(t) \cdot e^{ct} \qquad (q(t) \text{ Polynom mit } [q] \leq [p])$$

wobei v die Vielfachheit von c als Nullstelle des zugehörigen charakteristischen Polynoms ist.
Ist $b(t)$ der Real- bzw. Imaginärteil von $p(t) \cdot e^{ct}$, so ist entsprechend der Real- bzw. Imaginärteil von $t^v \cdot q(t) \cdot e^{ct}$ eine partikuläre Lösung.

3.5 Die Methode der Laplace-Transformation

Die **Laplace-Transformierte** einer Funktion f ist definiert als

$$\mathcal{L}(f)(u) = \int_0^\infty e^{-ut} \cdot f(t)\,dt$$

Existieren $\mathcal{L}(f),\ \ldots,\ \mathcal{L}(f^{(n)})$, so gilt:

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(u) = u^n \cdot \mathcal{L}(f)(u) - u^{n-1} \cdot f(0) - u^{n-2} \cdot \dot{f}(0) - \ldots - u \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Für genauere Informationen über die Laplace-Transformation sei auf Analysis III verwiesen.

Hat man nun das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ gegeben, wobei A eine Matrix mit konstanten Koeffizienten ist, so erhält man durch Anwendung der Laplace-Transformation

$$(u \cdot E - A) \cdot \mathcal{L}(\varphi)(u) = \mathcal{L}(\mathbf{b})(u) + \mathbf{c}$$

als Gleichungssystem für die Laplace-Transformierte der Lösungsfunktion φ.

Hat man das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b(t) \\ &x(0) = c_1,\ \dot{x}(0) = c_2,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = c_n \end{aligned}$$

gegeben, so erhält man durch Anwendung der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}(u^n + a_{n-1} \cdot u^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot u + a_0) \cdot \mathcal{L}(\varphi)(u) = \\ \mathcal{L}(b)(u) + c_1 \cdot u^{n-1} + (c_2 + a_{n-1} \cdot c_1) \cdot u^{n-2} + \ldots + \\ + (c_n + a_{n-1} \cdot c_{n-1} + \ldots + a_2 \cdot c_2 + a_1 \cdot c_1)\end{aligned}$$

als Gleichungssystem für die Laplace-Transformierte der Lösungsfunktion φ.

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf die lineare Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b(t)$$

n-ter Ordnung mit Polynomkoeffizienten vom Grad kleiner oder gleich k liefert – unter Beachtung der Formel

$$\mathcal{L}(.^k \cdot f)(u) = (-1)^k \cdot \frac{d^k}{du^k} \mathcal{L}(f)(u)$$

– eine lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung mit Polynomkoeffizienten vom Grad kleiner oder gleich n.

Die folgende Tabelle bietet eine Überblick über die Laplace-Transformierte der wichtigsten Funktionen:

$\mathbf{f}(\mathbf{t})$	$\mathcal{L}(\mathbf{f})(\mathbf{u})$	
1	$\frac{1}{u}$	$(u > 0)$
t^n	$\frac{n!}{u^{n+1}}$	$(u > 0,\ n \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}$	$(u > 0)$
$\frac{1}{\Gamma(a)} \cdot t^{a-1}$	$\frac{1}{u^a}$	$(u > 0,\ a > 0)$
e^{-at}	$\frac{1}{u+a}$	$(u > -a)$
$t^{n-1} \cdot e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(u+a)^n}$	$(u > -a,\ n \in \mathbb{N})$
$\sin at$	$\frac{a}{u^2+a^2}$	
$\cos at$	$\frac{u}{u^2+a^2}$	
$\sinh at$	$\frac{a}{u^2-a^2}$	$(u > \lvert a\rvert)$
$\cosh at$	$\frac{u}{u^2-a^2}$	$(u > \lvert a\rvert)$
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{u}$	$(u > 0)$
$\frac{\sinh at}{t}$	$\ln \sqrt{\frac{u+a}{u-a}}$	$(u > \lvert a\rvert)$
$\chi_{[a,\infty)}(t)$	$\frac{1}{u} \cdot e^{-au}$	$(u > 0,\ a > 0)$
$f(t-a) \cdot \chi_{[a,\infty)}(t)$	$e^{-au} \cdot \mathcal{L}(f)(u)$	$(a > 0)$
$e^{-at} \cdot f(t)$	$\mathcal{L}(f)(u+a)$	

3.6 Lineare Randwertprobleme

Man kann an die Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen auch andere Anforderungen stellen als eine Anfangsbedingung und erhält so eine sogenannte **Randbedingung**. Jedes Differentialgleichungssystem zusammen mit einer Randbedingung nennt man **Randwertproblem**. Randbedingungen für genau zwei Werte α, β heißen **Zweipunkt-Randwertprobleme**. Ein **lineares Zweipunkt-Randwertproblem** ist schließlich ein lineares Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ gemeinsam mit einer linearen Randbedingung $C \cdot \mathbf{x}(\alpha) + D \cdot \mathbf{x}(\beta) = \mathbf{c}$, wobei C und D quadratische Matrizen sind.

Hat man das lineare Zweipunkt-Randwertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t) , \qquad C \cdot \mathbf{x}(\alpha) + D \cdot \mathbf{x}(\beta) = \mathbf{c}$$

gegeben, und ist $\varphi(t) = W(t) \cdot \sigma + \varphi_p(t)$ die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems, so sind genau jene Lösungen auch Lösungen des Zweipunkt-Randwertproblems, deren Koeffizientenvektor σ das lineare Gleichungssystem

$$R(W) \cdot \sigma = \mathbf{c} - (C \cdot \varphi_p(\alpha) + D \cdot \varphi_p(\beta))$$

erfüllt, wobei $R(W) = C \cdot W(\alpha) + D \cdot W(\beta)$ ist. Diese Lösung ist genau dann eindeutig, wenn $R(W)$ für eine (oder äquivalent: jede) Lösungsbasis regulär ist. Ist $R(W)$ singulär, und ist der Rang von $R(W)$ derselbe wie der der Matrix, die durch Kombination von $R(W)$ und $\mathbf{c} - (C \cdot \varphi_p(\alpha) + D \cdot \varphi_p(\beta))$ entsteht, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Andernfalls ist das Problem unlösbar.

Im Fall der eindeutigen Lösbarkeit kann man die Lösungsfunktion $\varphi(t)$ des linearen Zweipunkt-Randwertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t) , \qquad C \cdot \mathbf{x}(\alpha) + D \cdot \mathbf{x}(\beta) = \mathbf{c}$$

mit Hilfe der **Green-Matrix**

$$G(t,u) := W(t) \cdot \big(z(t,u) \cdot E - R(W)^{-1} \cdot D \cdot W(\beta)\big) \cdot W^{-1}(u)$$

beschreiben:

$$\varphi(t) = W(t) \cdot R(W)^{-1} \cdot \mathbf{c} + \int\limits_{\alpha}^{\beta} G(t,u) \cdot \mathbf{b}(u) \, du$$

Dabei ist $z(t,u)$ wie folgt definiert:

$$z(t,u) = \begin{cases} 1 & \alpha \le u \le t \le \beta \\ 0 & \alpha \le t < u \le \beta \end{cases}$$

Für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung lässt sich obige Theorie natürlich auch anwenden, allerdings ergibt sich aufgrund der speziellen Gestalt, dass nur das letzte Element der ersten Zeile der Green-Matrix, die sogenannte **Green-Funktion** $\Gamma(t,u)$, die auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist, benötigt wird. Die Lösung $\varphi(t)$ eines eindeutig lösbaren linearen Zweipunkt-Randwertproblems k-ter Ordnung

$$\begin{aligned} x^{(k)} + a_{k-1} \cdot x^{(k-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x &= b(t) \\ C \cdot \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix} (\alpha) + D \cdot \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix} (\beta) &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

lautet dann:

$$\varphi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(t,u) \cdot b(t)\, du + \text{erste Komponente von } W(t) \cdot R(W)^{-1} \cdot \mathbf{c}$$

Ein Spezialfall sind die **Sturm-Randwertprobleme**, das sind Probleme der Gestalt

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_1(t) \cdot \dot{x} + a_0(t) \cdot x &= b(t) \\ c_1 \cdot x(\alpha) + c_2 \cdot \dot{x}(\alpha) &= 0 \\ d_1 \cdot x(\beta) + d_2 \cdot \dot{x}(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

die auch häufig in der Form

$$\frac{d}{dt}(p(t) \cdot \dot{x}) + q(t) \cdot x = \overline{b}(t) \qquad\qquad (p > 0)$$

geschrieben werden.

4 Stabilität

Man nennt zwei Anfangswertprobleme $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0^*) = \mathbf{c}$ und $\dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{d}$ auf dem Gebiet G **benachbart**, wenn es (in der Regel kleine) reelle Zahlen α, β, δ gibt, sodass gilt:

(1) $|t_0 - t_0^*| < \alpha$

(2) $|\mathbf{c} - \mathbf{d}| < \beta$

(3) $\|f(t, \mathbf{x}) - g(t, \mathbf{x})\| < \delta \quad$ auf G

Das **Lemma von Gronwall** besagt, dass für

$$0 \leq h(t) \leq v(t) + \int_{t_0}^{t} w(u) \cdot h(u)\, du$$

mit $w(u) \geq 0$ für $t \geq t_0$ gilt:

$$h(t) \leq v(t) + \int_{t_0}^{t} v(u) \cdot w(u) \cdot e^{\int_u^t w(\tau)\, d\tau}\, du$$

Mit dieser Hilfe kann man für benachbarte Anfangswertprobleme wie oben mit den zusätzlichen Voraussetzungen

(4) $\|f(t, \mathbf{x})\| \leq M \quad \forall\, (t, \mathbf{x}) \in G$

(5) f erfüllt auf G eine Lipschitzbedingung bezüglich $\mathbf{x}$ mit der Lipschitzkonstanten λ

die Differenz zweier Lösungen $\varphi(t)$ des ersten bzw. $\psi(t)$ des zweiten Anfangswertproblems abschätzen:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (M \cdot \alpha + \beta) \cdot e^{\lambda \cdot |t-t_0|} + \delta \cdot \int\limits_0^{|t-t_0|} e^{\lambda \cdot u}\, du$$

bzw. gröber

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq (M \cdot \alpha + \beta + \delta \cdot |t - t_0|) \cdot e^{\lambda \cdot |t-t_0|}$$

Für eine an $\mathbf{p}_0$ bezüglich $(t, \mathbf{x}) \in G \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ gleichmäßig stetige Funktion $\mathbf{p} \mapsto f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, wobei $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_0)$ noch eine Lipschitzbedingung bezüglich $\mathbf{x}$ erfüllen möge, konvergieren die Lösungen $\varphi_{\mathbf{p}}$ des Anfangswertproblems $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ gegen die (eindeutig bestimmte) Lösung $\varphi_{\mathbf{p}_0}$ des Anfangswertproblems $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_0),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$. Auf jedem kompakten Teil des gemeinsamen Definitionsbereiches ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig.

4.1 Ljapunow-Stabilität

Eine auf $[a, \infty)$ definierte Lösung φ des Systems $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ heißt **stabil** (im Sinn von Ljapunow) auf $[a, \infty)$, wenn es zu jedem $t_0 \in [a, \infty)$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon, t_0)$ gibt, sodass für $\|\varphi(t_0) - \mathbf{c}\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ gilt:

(1) Alle maximalen Intervall-Lösungen des Anfangswertproblems $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ sind zumindest auf $[t_0, \infty)$ definiert.

(2) Für jede dieser Lösungen ψ gilt:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0$$

Eine Lösung φ wie oben heißt **attraktiv** auf $[a, \infty)$, wenn es zu jedem $t_0 \in [a, \infty)$ ein $\gamma(t_0) > 0$ gibt, sodass für $\|\varphi(t_0) - \mathbf{c}\| \leq \gamma(t_0)$ gilt:

(1) Alle maximalen Intervall-Lösungen des Anfangswertproblems $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ sind zumindest auf $[a, \infty)$ definiert.

(2) Für jede dieser Lösungen ψ gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$$

Ist eine Lösung φ zugleich stabil und attraktiv auf $[a, \infty]$, so sagt man, φ sei **asymptotisch stabil** auf $[a, \infty)$.

Ist eine Lösung φ stabil bzw. attraktiv bzw. asymptotisch stabil auf $[a, \infty)$ für alle a innerhalb des maximalen Definitionsbereiches, so heißt φ stabil bzw. attraktiv bzw. asymptotisch stabil für $t \to \infty$.

Ist φ eine auf $[a, \infty)$ stabile Lösung von $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, so konvergieren für jedes $t_0 \in [a, \infty)$ die Lösungen ψ des Anfangswertproblems $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ für $\mathbf{c} \to \varphi(t_0)$ gleichmäßig auf $[a, \infty)$ gegen φ.

Untersucht man die Stabilität bzw. Attraktivität bzw. asymptotische Stabilität einer Lösung φ des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$, so genügt es, sofern f auf dem betrachteten Bereich eine Lipschitzbedingung bezüglich $\mathbf{x}$ erfüllt, die Existenz der in den obigen Definitionen geforderten Zahlen $\delta(\varepsilon, t_0)$ bzw. $\gamma(t_0)$ nur für den Wert $t_0 = a$ zu fordern.

Für Lösungen φ eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ folgt aus der Stabilität bzw. Attraktivität bzw. asymptotische Stabilität auf $[a, \infty)$ für ein $a \in D(\varphi)$ die Stabilität bzw. Attraktivität bzw. asymptotische Stabilität für $t \to \infty$.

Eine Lösung φ des Systems $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ ist genau dann stabil auf $[a, \infty)$, wenn die Null-Lösung des Systems $g(t, \mathbf{y} + \varphi(t), \dot{\mathbf{y}} + \dot{\varphi}(t)) = \mathbf{0}$ stabil auf $[a, \infty)$ ist.

Angewandt auf die Lösung φ eines linearen Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ liefert das: φ ist genau dann stabil auf $[a, \infty)$, wenn die Null-Lösung des Systems $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x}$ stabil auf $[a, \infty)$ ist, wobei a beliebig im maximalen Stetigkeitsintervall I (rechte Grenze: ∞) von A und $\mathbf{b}$ gewählt werden kann. Alle Lösungen besitzen also dasselbe Stabilitätsverhalten.

Es gilt für die Lösung φ des Systems $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ mit der Wronski-Matrix $W(t)$:

(1) φ stabil auf $[a, \infty) \iff W(t)$ beschränkt auf $[a, \infty)$

(2) φ asymptotisch stabil auf $[a, \infty) \iff \lim_{t \to \infty} W(t) = 0$

Ist $A(t)$ auf dem Stetigkeitsintervall beschränkt, so gelten alle Stabilitätsaussagen für $t \to \infty$.

Für Systeme $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ mit konstanter Matrix A bedeutet das dann:

(1) φ ist genau dann stabil für $t \to \infty$, wenn die Eigenwerte von A alle nichtpositiven Realteil haben, und im Fall $Re\, \lambda = 0$ die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit ist.

(2) φ ist genau dann asymptotisch stabil für $t \to \infty$, wenn die Eigenwerte von A alle negativen Realteil haben.

Hat man das System $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ mit $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gegeben, wobei f zumindest auf $S(a, \rho) := [a, \infty) \times K_\rho(\mathbf{0})$ stetig ist und F ein ebenfalls stetiges, zumindest auf $S(a, \rho)$ definiertes, erstes Integral des Systems ist, so ist die Stabilität der Null-Lösung gesichert durch:

(1) $F(t, \mathbf{0}) = 0$

(2) $\forall\, \sigma < \rho :\ \exists\, \varepsilon_\sigma < \sigma,\ s(\varepsilon_\sigma) > 0 :\ |F(t, \mathbf{x})| \geq s(\varepsilon_\sigma)\ \ \forall\, t \geq a,\ \varepsilon_\sigma \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sigma$

Die Bedingung (2) ist zumindest dann erfüllt, wenn es eine stetige Funktion $W : K_\rho(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ gibt mit $W(\mathbf{x}) \neq 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $|W(\mathbf{x})| \leq |F(t, \mathbf{x})| \quad \forall\, (t, \mathbf{x}) \in S(a, \rho)$.
Diese Bedingungen sind allerdings nur hinreichend, nicht notwendig.

4.2 Die direkte Methode von Ljapunow

Eine Funktion $V : \overline{S(a, \sigma)} \to \mathbb{R}$ heißt **positiv (semi)definit bezüglich x**, wenn es eine nur von $\mathbf{x}$ abhängige Funktion $W : \overline{K_\sigma(\mathbf{0})} \to \mathbb{R}$ gibt, die positiv (semi)definit ist und für die gilt: $W(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}) \quad \forall\, (t, \mathbf{x}) \in \overline{S(a, \sigma)}$.
Analog nennt man eine Funktion $V : \overline{S(a, \sigma)} \to \mathbb{R}$ **negativ (semi)definit bezüglich x**, wenn es eine nur von $\mathbf{x}$ abhängige Funktion $W : \overline{K_\sigma(\mathbf{0})} \to \mathbb{R}$ gibt, die negativ (semi)definit ist und für die gilt: $W(\mathbf{x}) \geq V(t, \mathbf{x}) \quad \forall\, (t, \mathbf{x}) \in \overline{S(a, \sigma)}$.

Eine stetige Funktion $W : \overline{K_\sigma(\mathbf{0})} \to \mathbb{R}$ ist genau dann positiv definit, wenn es eine stetige, streng monoton wachsende Funktion $\alpha : [0, \sigma] \to \mathbb{R}$ gibt, für die $\alpha(0) = 0$ und $W(\mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \overline{K_\sigma(\mathbf{0})}$ gilt.

Ist $V : (t, \mathbf{x}) \mapsto V(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so nennt man $\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) \cdot f_j(t, \mathbf{x})$ die **Ableitung von V bezüglich des Systems** oder **längs der Trajektorien des Systems** $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$.
Für jedes erste Integral $F(t, \mathbf{x})$ des Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ gilt $\dot{F}(t, \mathbf{x}) = 0$ für jedes $\mathbf{x}$, welches auf einer Trajektorie liegt.

Eine zumindest auf $S(a, \rho)$ definierte, differenzierbare reellwertige Funktion V heißt **Ljapunow-Funktion** des (zumindest auf $S(a, \rho)$ definierten) Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ mit $F(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, wenn für geeignetes $\sigma < \rho$ gilt:

(1) $V(t, \mathbf{0}) = 0 \quad \forall\, t \geq a$

(2) $V(t, \mathbf{x})$ ist auf $\overline{S(a, \sigma)}$ positiv definit bezüglich $\mathbf{x}$.

(3) $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ ist auf $\overline{S(a, \sigma)}$ negativ semidefinit bezüglich $\mathbf{x}$.

Hinreichend für die Stabilität auf $[a, \infty)$ der Null-Lösung des Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ mit zumindest auf $S(a, \rho)$ stetigem f mit $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ist dann die Existenz einer Ljapunow-Funktion V.
Fordert man zusätzlich, dass $\dot{V}$ negativ definit bezüglich $\mathbf{x}$ ist, und dass der

Grenzübergang $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} V(t,\mathbf{x}) = 0$ gleichmäßig bezüglich $t \in [a,\infty)$ ist, so kann man sogar auf die asymptotische Stabilität auf $[a,\infty)$ schließen.

Hinreichend für die Instabilität auf $[a,\infty)$ der Null-Lösung des Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(t,\mathbf{x})$ mit zumindest auf $S(a,\rho)$ stetigem f mit $f(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ist die Existenz einer differenzierbaren Funktion $V : S(a,\rho) \to \mathbb{R}$ mit

(1) $V(t,\mathbf{0}) = 0$

(2) $\forall$ hinreichend kleine $\sigma < \rho: \quad \exists\, t_0 \geq a,\ \mathbf{c} \in K_\sigma(\mathbf{0}): \quad V(t_0,\mathbf{c}) < 0$

(3) $\dot{V}$ ist negativ definit bezuüglich $\mathbf{x}$

(4) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} V(t,\mathbf{x}) = 0$ ist gleichmäßig bezüglich $t \in [a,\infty)$

Man kann (für dasselbe System wie oben) auch die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion $V : S(a,\rho) \to \mathbb{R}$ und die eines Gebietes $X \subseteq K_\sigma(\mathbf{0})$ ($\sigma < \rho$ passend) fordern mit

(1) $V(t,\mathbf{0}) = 0 \qquad \forall\, t \geq a, \quad \forall\, \mathbf{x} \in K_\sigma(\mathbf{0}) \cap \mathrm{Rd}X$

(2) $V(t,\mathbf{x})$ ist auf $[a,\infty) \times X$ positiv und beschränkt durch S

(3) $\dot{V}(t,\mathbf{x}) \geq \alpha(V(t,\mathbf{x}))$ auf $[a,\infty) \times X$ für eine stetige, monoton wachsende Funktion $\alpha : [0,S] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(u) = 0 \iff u = 0$

(4) $\mathbf{0} \in \mathrm{Rd}X$

Auch in diesem Fall folgt die Instabilität der Null-Lösung auf $[a,\infty)$.

Das Auffinden derartiger Funktionen ist allerdings oft schwierig. Manchmal leistet ein erstes Integral eines vereinfachten Systems das Gewünschte.

Bei autonomen Systemen in der Ebene hilft oft auch die Transformation in Polarkoordinaten, wo z. B. aus dem Vorzeichen von $\dot{r}$ Rückschlüsse auf die Stabilität von Lösungen gezogen werden können.

4.3 Linearisierung

Sei das System $\dot{\mathbf{x}} = f(t,\mathbf{x}) = h(t,\mathbf{x}) + s(t,\mathbf{x})$ gegeben. Dann heißt $s(t,\mathbf{x})$ eine **Störung** des Systems $\dot{\mathbf{x}} = h(t,\mathbf{x})$ und das System $\dot{\mathbf{x}} = h(t,\mathbf{x}) + s(t,\mathbf{x})$ das durch $s(t,\mathbf{x})$ **gestörte System**.

Ist die Abbildung $x \mapsto f(t,\mathbf{x})$ an $\mathbf{x}_0$ (bei festem t) differenzierbar, so kann f in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ linear (bezüglich $\mathbf{x}$) approximiert werden.
Man nennt dann das System $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \mathbf{b}(t)$ die **Linearisierung** des Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(t,\mathbf{x})$ um $\mathbf{x}_0$, wenn gilt:

$$f(t,\mathbf{x}) = A(t)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \mathbf{b}(t) + s(t,\mathbf{x}) \qquad \text{mit } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|s(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0$$

$A(t)$ ist dann die Funktionalmatrix von $\mathbf{x} \mapsto f(t, \mathbf{x})$.

Ziel ist es nun, aus dem Stabilitätsverhalten von Lösungen des linearisierten Systems auf das Stabilitätsverhalten von Lösungen des ursprünglichen Systems zu schließen. Allerdings sind dafür zusätzliche Voraussetzungen notwendig, für die man den Begriff der gleichmäßigen (asymptotischen) Stabilität einführt:
Die Lösung φ des Systems $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ heißt **gleichmäßig stabil** auf $[a, \infty)$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ und $t_0 \geq a$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ (von t_0 unabhängig) existiert, sodass für eine Lösung ψ mit Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ gilt:

$$\|\mathbf{c} - \varphi(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

Die Lösung φ des Systems $g(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ heißt **gleichmäßig attraktiv** auf $[a, \infty)$, wenn ein $\gamma > 0$ existiert, sodass für alle $t_0 \geq a$ und eine Lösung ψ mit Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ gilt:

$$\|\mathbf{c} - \varphi(t_0)\| < \gamma \quad \Rightarrow \quad \exists\, T(\varepsilon) > 0 : \; \|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \qquad \forall\, t \geq t_0 + T(\varepsilon)$$

Hat man das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x}$ mit der Wronski-Matrix einer Lösungsbasis $W(t)$ gegeben, so gilt:

(1) Die Null-Lösung ist genau dann gleichmäßig stabil auf $[a, \infty)$, wenn gilt:

$$\left\| W(t) \cdot W(t_0)^{-1} \right\| < S \quad \forall\, t_0 \geq a$$

(2) Ist die Null-Lösung gleichmäßig stabil auf $[a, \infty)$, so ist sie genau dann gleichmäßig asymptotisch stabil auf $[a, \infty)$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \; \exists\, T(\varepsilon) > 0 : \; \left\| W(t) \cdot W(t_0)^{-1} \right\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0 + T(\varepsilon)$$

Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten bedeutet das dann, das die Null-Lösung genau dann gleichmäßig (asymptotisch) stabil auf $[a, \infty)$ $(\forall\, a \in \mathbb{R})$ ist, wenn sie (asymptotisch) stabil für $t \to \infty$ ist.

Ist die Null-Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x}$ gleichmäßig asymptotisch stabil auf $[a, \infty)$, so gibt es zu jeder Lösungsbasis reelle Zahlen $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\left\| W(t) \cdot W(t_0)^{-1} \right\| \leq \alpha \cdot e^{-\beta \cdot (t - t_0)} \qquad \forall\, t \geq t_0 \geq a$$

Mit Hilfe der obigen Aussage und des Lemma von Gronwall (siehe Seite 23) stellt man fest, dass die gleichmäßige asymptotische Stabilität der Null-Lösung des Systems $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x}$ und die Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\|s(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$ bezüglich $t \in [a, \infty)$ hinreichend ist für die asymptotische Stabilität der Null-Lösung des Systems $\dot{\mathbf{x}} = A(t) \cdot \mathbf{x} + s(t, \mathbf{x})$.

Besitzt die Matrix A mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil und ist der Grenzübergang $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\|s(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$ gleichmäßig bezüglich $t \in [a, \infty)$, so kann man auf die Instabilität der Null-Lösung des Systems $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + s(t, \mathbf{x})$ schließen.

Geht man von der Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\|s(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$ über zu einer stärkeren Voraussetzung, nämlich der Existenz einer Funktion $\varepsilon(t)$ mit $\frac{\|s(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \varepsilon(t)$ auf $S(a,\rho)$ und $\int_a^\infty \varepsilon(t)\,dt < \infty$, so gilt:

(1) Die gleichmäßige Stabilität der Null-Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\cdot\mathbf{x}$ auf $[a,\infty)$ ist hinreichend für die Stabilität der Null-Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\cdot\mathbf{x} + s(t,\mathbf{x})$ auf $[a,\infty)$.

(2) Ist die Null-Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\cdot\mathbf{x}$ asymptotisch und gleichmäßig stabil auf $[a,\infty)$, so ist die Null-Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\cdot\mathbf{x} + s(t,\mathbf{x})$ asymptotisch stabil auf $[a,\infty)$.

5 Qualitative Analyse

Sei das Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\cdot\mathbf{x}$ gegeben.

Betrachtet man $T\cdot e^{tJ}$, so stellt man fest, dass die zu einem Eigenwert gehörigen Eigen- und Hauptvektoren in T bei der Multiplikation nur mit den zu λ gehörigen Blöcken in e^{tJ} zusammen treffen. Man kann also von den **zu $\boldsymbol{\lambda}$ gehörigen Lösungen** sprechen und erhält:

$Re\,\lambda < 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \mathbf{0}$

$Re\,\lambda > 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi(t)$ unbeschränkt für $t\to\infty$

$Re\,\lambda = 0 \quad\Rightarrow$ konstante Lösung (falls $Im\,\lambda = 0$) bzw. periodische Schwingung (falls $Im\,\lambda \neq 0$) und eventuell polynomiale Lösungen bzw. Schwingungen mit polynomial wachsender Amplitude

$Im\,\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi(t)$ verhält sich im Wesentlichen exponentiell und (ab gewissem t) monoton

$Im\,\lambda \neq 0 \quad\Rightarrow$ Überlagerung von Sinus- und Cosinusschwingungen mit im Wesentlichen exponentieller Amplitude

Hat man das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = A\cdot\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ gegeben, so hängt das Verhalten der Lösung $\varphi(t)$ nur von jenen Basislösungen $\varphi_{(i)}(t)$ ab, für die d_i in der Darstellung $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^k d_i\cdot\mathbf{b}_i$ nicht 0 ist. Kennt man also das Verhalten dieser Basislösungen, so kann man auf das Verhalten von $\varphi(t)$ schließen.

5.1 Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms im Intervall (a,b)

Die Anzahl der (verschiedenen) Nullstellen eines Polynoms $p(t)$ im Intervall (a,b) ist genau die Anzahl der Sprünge von $-\infty$ auf $+\infty$ der rationalen Funktion $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$ in (a,b) (nach Kürzung).

Man definiert nun: Der **Cauchy-Index** $I_a^b\left(\frac{p}{q}\right)$ einer rationalen Funktion $\frac{p(t)}{q(t)}$ auf (a,b) ist die Differenz der Anzahl der Sprünge von $-\infty$ auf $+\infty$ in (a,b) und jener von $+\infty$ auf $-\infty$ in (a,b).

Zur Berechnung des Cauchy-Index können **Sturm-Ketten** auf (a,b) herangezogen werden; das sind endliche Folgen von Polynomen $f_1, \ldots, f_m$ mit

(1) f_m hat in (a,b) keine Nullstelle

(2) $f_j(t) = 0$ für ein $t \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f_{j-1}(t) \cdot f_{j+1}(t) < 0 \quad (j = 2, \ldots, m-1)$

Ist $f_1, \ldots, f_m$ eine Sturmkette auf (a,b), dann gilt:

$$I_a^b\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = V(a) - V(b)$$

wobei $V(t)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ bezeichnet.

Die Konstruktion einer Sturm-Kette kann mit Hilfe des euklidischen Algorithmus erfolgen (sofern $[f_2] < [f_1]$): Ist $f_j(t) = g_j(t) \cdot f_{j+1}(t) + r_j(t)$, so setzt man $f_{j+2}(t) := -r_j(t)$ und erhält so schließlich eine Sturm-Kette (eventuell durch Division aller Polynom durch ihren größten gemeinsamen Teiler bzw. durch Streichung (positiver) konstanter Faktoren).

Möchte man die Anzahl der rein imaginären Nullstellen eines Polynoms $p(t)$ berechnen, so teilt man am besten in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} u(t) &:= Re(p(i \cdot t)) = p_0 - p_2 \cdot t^2 + p_4 \cdot t^4 - p_6 \cdot t^6 + - \ldots \\ v(t) &:= Im(p(i \cdot t)) = p_1 \cdot t - p_3 \cdot t^3 + p_5 \cdot t^5 - p_7 \cdot t^7 + - \ldots \end{aligned}$$

Dann gilt: $i \cdot b$ ist genau dann Nullstelle von $p(t)$, wenn b Nullstelle von des größten gemeinsamen Teilers von $u(t)$ und $v(t)$ ist. Diese können meist leicht berechnet werden, oder man wendet obiges Verfahren an, um ihre Anzahl zu bestimmen.

Sei $p(t)$ ein Polynom vom Grad n, s die Anzahl der Nullstellen von $p(t)$ auf der imaginären Achse (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt), und $u(t)$ und $v(t)$ wie oben definiert. Dann gilt für die Anzahl k der Nullstellen mit positivem Realteil (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt):

$$n - s - 2k = \begin{cases} I_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u}{v}\right) & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -I_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{v}{u}\right) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Durch Umformungen erhält man schließlich:

$$n - s - 2k = I_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{p_{n-1} \cdot t^{n-1} - p_{n-3} \cdot t^{n-3} + p_{n-5} \cdot t^{n-5} - + \ldots}{p_n \cdot t^n - p_{n-2} \cdot t^{n-2} + p_{n-4} \cdot t^{n-4} - + \ldots}\right)$$

Bildet man eine Sturm-Kette beginnend mit diesen beiden Polynomen, so ist $n-s-2k$ genau die Differenz der Anzahl der ungeraden Gradsprünge in $f_1, \ldots, f_m$

mit Beibehaltung des Vorzeichens und jener mit Änderung des Vorzeichens. Da die betreffenden Polynome nur an $\pm\infty$ auszuwerten sind, interessieren uns nur die Vorzeichen der Führungskoeffizienten, die man mit Hilfe der **Hurwitz-Matrix** von $p(t)$ berechnen kann:

$$H(p) := \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & p_{n-7} & \cdots & \cdots & 0 \\ p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & p_{n-6} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_{n-1} & p_{n-3} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_2 & p_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Sei nun M_j der j-te Hauptminor der Hurwitz-Matrix ($j = 1, \ldots, n$). Dann gilt nach dem **Satz von Routh und Hurwitz**:

(1) Sind alle Hauptminoren von 0 verschieden, so hat $p(t)$ keine Nullstellen auf der imaginären Achse und die Anzahl der Nullstellen mit positivem Realteil ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $p_n, M_1, \frac{M_2}{M_1}, \ldots, \frac{M_n}{M_{n-1}}$.

(2) Sind $M_1, \ldots, M_m \neq 0$, aber $M_{m+1} = \ldots = M_n = 0$, so bezeichnet $n - m$ die Anzahl der Nullstellen auf der imaginären Achse (die immer in konjugierten Paaren auftreten) und der entgegengesetzten Nullstellen. Die Anzahl der Nullstellen mit positivem Realteil ist dann gleich der Anzahl der Paare entgegengesetzter Nullstellen plus die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $p_n, M_1, \frac{M_2}{M_1}, \ldots, \frac{M_m}{M_{m-1}}$.

(3) Sind $M_1 = \ldots = M_p = 0$ und $M_{p+1}, \ldots, M_n \neq 0$, so ersetzt man die Koeffizienten p_j in Zeilen mit ungerader Nummer passend durch $p_j + \lambda_j \cdot \varepsilon$, sodass $M_1^*, \ldots, M_m^*$ ungleich 0 werden, ohne dass sich das Vorzeichen der übrigen Hauptminoren ändert, und geht dann nach dem obigen Schema vor.

(4) Treten „zwischendurch“ 0 auf, wird analog zu (3) vorgegangen.

5.2 Phasenportraits autonomer Systeme

Sei die eindeutige Lösbarkeit jedes Anfangswertproblems $g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ auf X gesichert. Dann folgt:

(1) Jeder Punkt von X liegt auf genau einer Trajektorie.

(2) Es gibt keine sich selbst überschneidenden Trajektorien.

(3) Die geschlossenen Trajektorien entsprechen genau den periodischen Lösungen.

Die **∞-Grenzmenge** $G_\infty(\varphi)$ einer Funktion $\varphi : [a,\infty) \to \mathbb{R}^k$ ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, zu denen eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \mathbf{x}$ existiert.

Es gilt:

(1) ∞-Grenzmengen sind stets abgeschlossen.

(2) Ist φ stetig und $G_\infty(\varphi)$ beschränkt, so ist $G_\infty(\varphi)$ zusammenhängend.

Ist außerdem die eindeutige Lösbarkeit jedes Anfangswertproblems gesichert, so gilt für eine bis $+\infty$ definierte Lösung φ von $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ weiters:

(3) Ist $\mathbf{c} \in G_\infty(\varphi)$, dann ist die gesamte Trajektorie des Anfangswertproblems $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ in $G_\infty(\varphi)$ enthalten.

(4) (a) $G_\infty(\varphi) = \emptyset \iff \varphi$ wird für $t \to \infty$ unbeschränkt

(b) $G_\infty(\varphi)$ beschränkt $\Rightarrow$ $G_\infty(\varphi)$ ist Vereinigung von Trajektorien von bis $+\infty$ definierten Lösungen.

In der Ebene kann man noch mehr Aussagen machen:

Das **negative Kriterium von Bendixson** besagt, dass für ein einfach zusammenhängendes Gebiet G und dort stetig differenzierbare Funktionen p, q, für die $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}$ auf G das Vorzeichen nicht wechselt und nicht identisch 0 ist, gilt: Es gibt keine ganz in G liegende geschlossene Trajektorie des Systems $\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& p(x,y) \\ \dot{y} &=& q(x,y) \end{array}\right.$.

Etwas allgemeiner ist das **Kriterium von Dulac**, bei dem an die Stelle von $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}$ die Funktion $\frac{\partial (M\cdot p)}{\partial x} + \frac{\partial (M\cdot q)}{\partial y}$ tritt, wobei M eine auf G stetig differenzierbare Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$ ist.

Die **Drehung $\boldsymbol{\Delta_K(p,q)}$ eines Vektorfeldes** (p,q) längs einer Kurve K ist definiert als die Variation des Polarwinkels bei Durchlaufung der Kurve.
Für jede glatte Durchlaufung einer geschlossenen einfachen glatten Kurve K in der Ebene gilt: $\Delta_K(\dot{\varphi}) = 2\pi$.

Ist K eine geschlossene Trajektorie des Systems $\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& p(x,y) \\ \dot{y} &=& q(x,y) \end{array}\right.$ mit auf X stetigem Richtungsfeld (p,q), so enthält der von X begrenzte Bereich mindestens einen Punkt, der entweder nicht zu X gehört, oder der ein singulärer Punkt des Richtungsfeldes ist.

Eine **Transversale** eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ ist ein Geradenstück ohne seine Endpunkte, längs dessen Abschluss der Richtungsvektor der Geraden und der Feldvektor linear unabhängig sind.

Mit Hilfe einiger Sätze über Transversalen eines ebenen stetigen Richtungsfeldes erhält man schließlich den **Satz von Poincaré und Bendixson**: Für das System $\begin{cases} \dot{x} &= p(x,y) \\ \dot{y} &= q(x,y) \end{cases}$ mit lokaler Lipschitzbedingung auf X und eine bis $+\infty$ definierte Lösung φ des Systems gilt stets eine der folgenden Aussagen:

(1) $G_\infty(\varphi) = \emptyset$, d. h. φ wird für $t \to \infty$ unbeschränkt

(2) $G_\infty(\varphi)$ ist nicht leer, enthält aber keine singulären Punkte des Richtungsfeldes. Dann besteht $G_\infty(\varphi)$ aus genau einer geschlossenen Trajektorie, die **Grenzzyklus** genannt wird.

(3) $G_\infty(\varphi)$ enthält singuläre Punkte. Dann setzt sich $G_\infty(\varphi)$ aus nicht geschlossenen Trajektorien von bis $+\infty$ definierten Lösungen zusammen, und die ∞-Grenzmengen dieser Lösungen bestehen jeweils nur aus singulären Punkten des Richtungsfeldes.

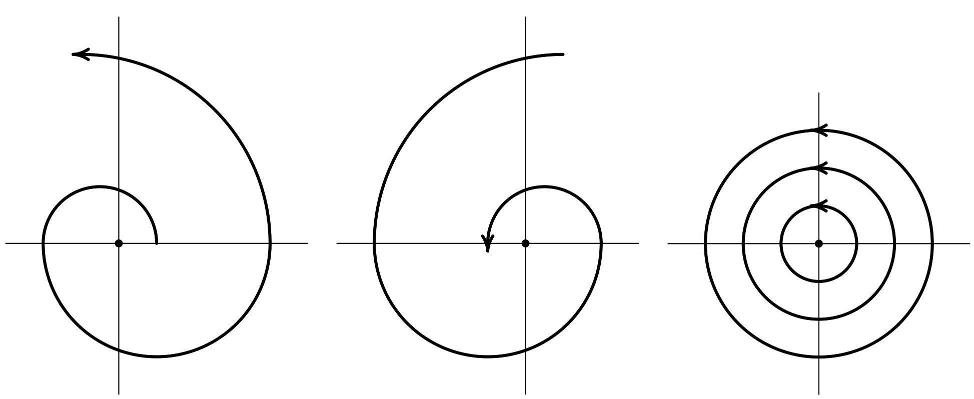
5.3 Phasenportraits zweidimensionaler autonomer Systeme in der Nähe stationärer Punkte

Zuerst betrachtet man homogene lineare Differentialgleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hat A konjugiert komplexe Eigenwerte λ und $\overline{\lambda}$, so umrundet jede Trajektorie den einzigen stationären Punkt $(0,0)$, und zwar in folgendem Sinn:

- *Re* $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Polarradius wächst, d. h. $(0,0)$ ist ein **abstoßender Brenn-** oder **Strudelpunkt**.
- *Re* $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Polarradius fällt, d. h. $(0,0)$ ist ein **anziehender Brenn-** oder **Strudelpunkt**.
- *Re* $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Polarradius ist konstant, d. h. $(0,0)$ ist ein **Zentrum** oder **Wirbelpunkt**.

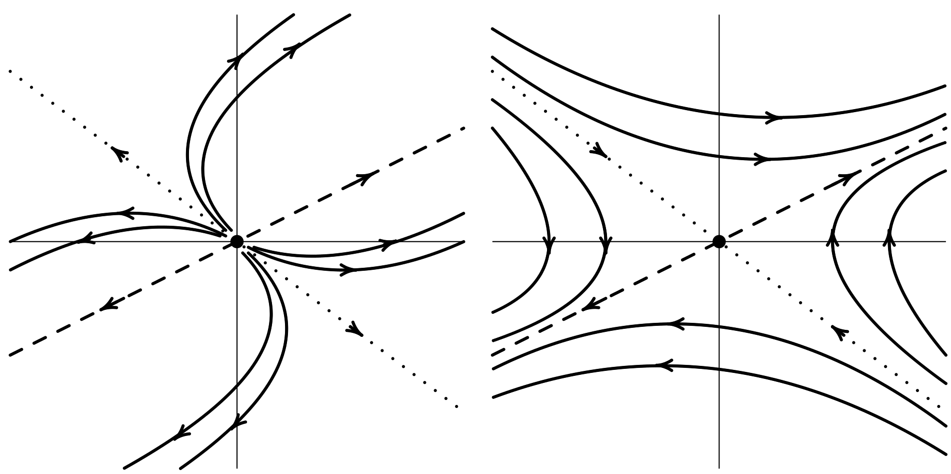


abstoßender Strudelpunkt anziehender Strudelpunkt Zentrum

Sind die Eigenwerte von A beide reell, so strebt der Polarwinkel jeder Lösung des Systems für $t \to \pm\infty$ gegen einen endlichen Grenzwert. Diese Grenzwerte werden **charakteristische Richtungen** des Systems genannt. Es stellt sich heraus, dass der zum größeren Eigenwert gehörige Eigenvektor die charakteristische Richtung für $t \to +\infty$ beschreibt (in den folgenden Skizzen immer strichliert dargestellt), während der zum kleineren Eigenwert gehörige Eigenvektor die charakteristische Richtung für $t \to -\infty$ angibt (in den folgenden Skizzen immer punktiert dargestellt).

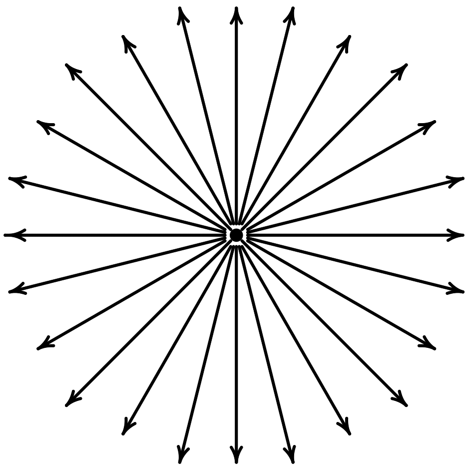
Sind die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 verschieden, so gibt es folgende Fälle:

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad \Rightarrow$ Polarradius wächst, d. h. $(0,0)$ ist ein **abstoßender Knoten**. Die Tangentenrichtungen der nicht geraden Trajektorien streben bei Annäherung an $(0,0)$ gegen die zum kleineren Eigenwert gehörige charakteristische Richtung, während sie sich für $t \to +\infty$ der zum größeren Eigenwert gehörigen charakteristischen Richtung nähern.
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad \Rightarrow$ Polarradius fällt, d. h. $(0,0)$ ist ein **anziehender Knoten**. Die Tangentenrichtungen der nicht geraden Trajektorien streben bei Annäherung an $(0,0)$ gegen die zum größeren Eigenwert gehörige charakteristische Richtung, während sie sich für $t \to -\infty$ der zum kleineren Eigenwert gehörigen charakteristischen Richtung nähern.
- $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ (o. B. d. A.) $\quad \Rightarrow \quad (0,0)$ ist ein **Sattelpunkt**. Die nicht geraden Trajektorien schmiegen sich in der Nähe von $(0,0)$ an das Kreuz der charakteristischen Richtungen.

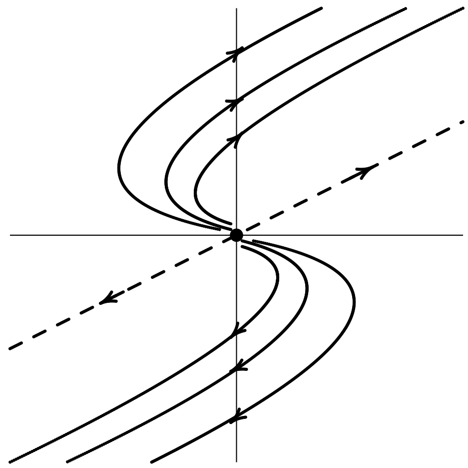


abstoßender Knoten — Sattelpunkt

Tritt ein doppelter Eigenwert auf, so liegt entweder ein **Sternknoten** vor, d. h. die Trajektorien sind genau die Halbgeraden durch den Ursprung (das ist dann der Fall, wenn der Eigenraum zweidimensional ist), oder man erhält einen **Knoten**, bei dem es nur eine charakteristische Richtung gibt. Je nach dem Vorzeichen des Eigenwertes spricht man wieder von einem abstoßenden oder einem anziehenden (Stern-)Knoten.

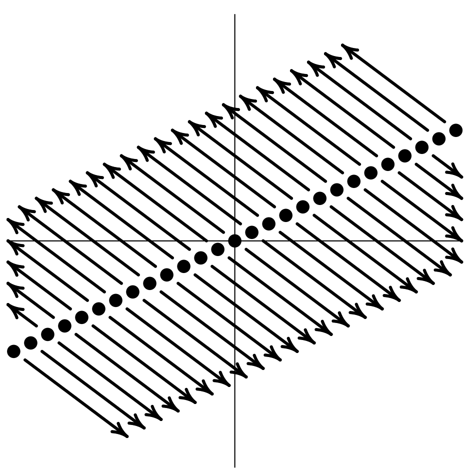


abstoßender Sternknoten

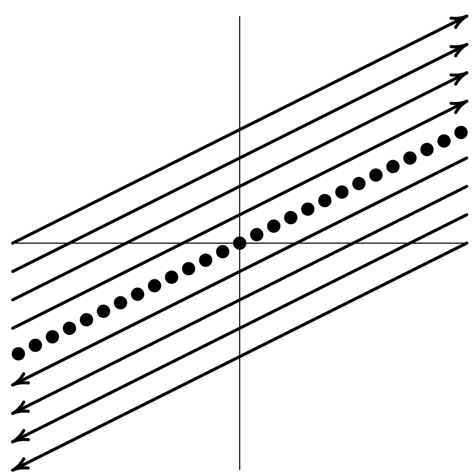


abstoßender Knoten

Ist ein Eigenwert 0, so sind alle Punkte auf der durch den zu 0 gehörigen Eigenvektor aufgespannten Geraden g durch den Ursprung singuläre Punkte. Die übrigen Trajektorien sind entweder die Halbgeraden, deren Richtung durch den Eigenvektor zum anderen Eigenwert beschrieben ist (wenn ein zweiter, von 0 verschiedener Eigenwert λ vorliegt), und die von einem singulären Punkt ausgehen (zu diesem hin orientiert, falls $\lambda < 0$, ansonsten von ihm weg orientiert), oder die zu g parallelen Geraden (falls 0 doppelter Eigenwert ist).



Eigenwerte 0 und $\lambda > 0$



doppelter Eigenwert 0

Hat man das System $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & p(x,y) \\ \dot{y} & = & q(x,y) \end{array} \right.$ mit der Gleichgewichtslage (α, β) gegeben, und ist $\frac{d(p,q)}{d(x,y)}(\alpha, \beta)$ regulär, so gilt, dass das Phasenportrait des ursprünglichen Systems „ähnlich“ jenem des linearisierten Systems ist, d. h. präziser ausgedrückt:

(1) Ist $(0,0)$ anziehender bzw. abstoßender Brennpunkt des linearisierten Systems, so ist (α, β) anziehender bzw. abstoßender Brennpunkt des ursprünglichen Systems.

(2) Ist $(0,0)$ Zentrum des linearisierten Systems, so ist (α, β) entweder Zentrum oder anziehender oder abstoßender Brennpunkt des ursprünglichen Systems.

(3) Ist $(0,0)$ anziehender bzw. abstoßender Knoten des linearisierten Systems, so ist (α, β) anziehender bzw. abstoßender Knoten des ursprünglichen Systems.

(4) Ist $(0,0)$ anziehender bzw. abstoßender Sternknoten des linearisierten Systems, so ist (α, β) anziehender bzw. abstoßender Knoten oder Brennpunkt des ursprünglichen Systems.

(5) Ist $(0,0)$ Sattelpunkt des linearisierten Systems, so ist (α, β) Sattelpunkt des ursprünglichen Systems.

Index