

Komplexe Analysis B

**Eine Zusammenfassung von Bernhard Kabelka
zur Vorlesung von Prof. Ludwig im SS 2003**

Version 1.01, 15. März 2004

Es sei ausdrücklich betont, dass

- (1) dieses Essay ohne das Wissen und die Mitarbeit von Prof. Ludwig entstanden ist,
- (2) trotz großer Anstrengungen seitens des Autors, eine möglichst fehlerfreie und vollständige Zusammenfassung zu liefern, sich Fehler eingeschlichen haben könnten (sollte jemand einen Fehler entdecken, so bittet der Autor um Benachrichtigung, vorzugsweise per eMail an bernhard@kabelka.net),
- (3) die Lektüre dieser Zusammenfassung keinesfalls den persönlichen Besuch der Vorlesung bzw. das Studium des Skriptums ersetzen, sondern bestenfalls ergänzen kann.

Die aktuelle Version dieser Datei ist erhältlich unter:

<http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/kana.pdf>

<http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/kana.ps.gz>

Inhaltsverzeichnis

1	Die komplexen Zahlen	1
2	Differenzieren im Komplexen	1
3	Potenzreihen	1
4	Holomorphie und Winkeltreue	2
5	Komplexe Integralrechnung	3
6	Cauchy'scher Integralsatz und Cauchy'sche Integralformel	4
7	Wichtige Sätze über holomorphe Funktionen	5
8	Cauchy'scher Integralsatz und Homotopie	6
9	Cauchy'sche Integralformel und Umlaufzahlen	7
10	Weitere wichtige Sätze über holomorphe Funktionen	8
11	Singularitäten	8
12	Residuensatz	10
13	Sätze über Funktionenfolgen	11
14	Produktsatz von Weierstraß & Satz von Mittag-Leffler	11
15	Automorphismen	12
16	Riemann'scher Abbildungssatz	13
17	Harmonische Funktionen	14
	Anhang	16
A	Berechnung von Integralen	16
B	Berechnung von unendlichen Summen	18
C	Produktdarstellung holomorpher Funktionen	19
D	Konstruktion meromorpher Funktionen	20

1 Die komplexen Zahlen

Die Grundlagen zum Rechnen mit komplexen Zahlen (Polarkoordinaten, Betrag einer komplexen Zahl, Potenzieren und Wurzelziehen sowie die Topologie von \mathbb{C}) sollten bekannt sein. Für genauere Informationen siehe Zusammenfassung zu **Analysis I**, Kapitel 1.10: „Die komplexen Zahlen“.

2 Differenzieren im Komplexen

Eine Funktion f heißt an der Stelle z_0 (**komplex**) **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser wird dann mit $f'(z_0)$ bezeichnet. Wie im Reellen gilt, dass jede differenzierbare Funktion auch stetig ist. Weiters gelten die Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel wie in \mathbb{R} .

Ist $f = u + i \cdot v$ differenzierbar in $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$, dann sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in (x_0, y_0) partiell differenzierbar, und es gelten die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**:

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Sind umgekehrt $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in (x_0, y_0) stetig partiell differenzierbar und gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, so ist $f = u + i \cdot v$ in $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ differenzierbar.

Sei $f = u + i \cdot v$ differenzierbar und seien u und v zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Derartige Funktionen u bzw. v nennt man **harmonisch**.

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (D offen) heißt **holomorph in D** , wenn f auf D differenzierbar ist. Weiters heißt f **holomorph in z_0** , wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass f auf U differenzierbar ist.

3 Potenzreihen

Die Grundbegriffe (gleichmäßige Konvergenz, absolute Konvergenz, Konvergenzradius, etc.) und wichtigsten Regeln (Umordnungssatz, Weierstraß'sches Majorantenkriterium, Wurzel- und Quotientenkriterium, etc.) für Potenzreihen übertragen sich aus dem Reellen. Für genauere Informationen hierzu siehe Skriptum zu **Analysis I (Prof. Mlitz)**, Kapitel 3.9: „Funktionenreihen“ bzw. Kapitel 3.10: „Potenzreihen“.

Über Potenzreihen kann man nun auch die aus dem reellen bekannten Funktionen definieren:

(1) **Exponentialfunktion:** $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(2) **Trigonometrische Funktionen:**

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

(3) **Hyperbolische Funktionen:**

$$\cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Im Folgenden bezeichne $G \subseteq \mathbb{C}$ ein **Gebiet**, d. h. eine offene, zusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlen.

Man nennt $w \in \mathbb{C}$ **Logarithmus** von z , wenn gilt: $e^w = z$.

Eine stetige Funktion $l : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Zweig des Logarithmus**, wenn für alle $z \in G$ gilt: $e^{l(z)} = z$.

Die Funktion

$$\log z := \log |z| + i \cdot \arg z \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

wird **Hauptzweig des Logarithmus** genannt. Alle Zweige des Logarithmus sind dann gegeben durch $\log z + i \cdot 2\pi k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber fest.

Eine Funktion f heißt **analytisch** in z_0 , wenn f um z_0 in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ entwickelbar ist, d. h. es existiert eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad \forall z \in \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| < R\}$$

4 Holomorphie und Winkeltreue

Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Weg** oder **Parameterdarstellung einer Kurve**. Sind $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma \in \mathcal{C}^1[a, b]$, so spricht man von einem **\mathcal{C}^1 -Weg**.

Zwei (\mathcal{C}^1) -Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ heißen **äquivalent**, wenn es eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ gibt mit $\varphi \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $\varphi' > 0$ und $\sigma \circ \varphi = \gamma$. Eine Äquivalenzklasse von (\mathcal{C}^1) -Wegen heißt dann **(\mathcal{C}^1) -Kurve**.

Als **Winkel** zwischen den zwei \mathcal{C}^1 -Kurven γ_1 und γ_2 im Punkt $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0)$ bezeichnet man

$$\alpha := \arg \gamma_2'(s_0) - \arg \gamma_1'(t_0)$$

Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt dann (**gleichsinnig**) **winkeltreu** oder **konform**, wenn sich für zwei \mathcal{C}^1 -Wege γ_1, γ_2 , die sich in G unter dem Winkel α schneiden, auch die Bildkurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ unter dem Winkel α schneiden.

Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f' \neq 0$ auf G ist konform. Umgekehrt ist jede konforme Abbildung $f = u + i \cdot v : G \rightarrow \mathbb{C}$, für die u und v stetig partiell differenzierbar sind, holomorph auf G und es gilt $f' \neq 0$.

5 Komplexe Integralrechnung

Ist $f \in \mathcal{C}(G)$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein \mathcal{C}^1 -Weg mit $\gamma(t) \in G \quad \forall t \in [a, b]$, dann nennt man

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

ein **Kurvenintegral**. Es gilt für $f_n, f \in \mathcal{C}(\gamma)$ mit $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf γ :

$$(1) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \cdot \text{Länge}(\gamma)$$

$$(2) \quad \int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$$

Ist $f \in \mathcal{C}(G)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist **integrabel**, d. h. f besitzt eine **Stammfunktion** (das ist eine Funktion F mit $F' = f$).

(2) Das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist **wegunabhängig**, d. h. es hängt nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ ab.

(3) Für alle geschlossenen Wege γ gilt: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Ein Gebiet G heißt **sternförmig** bezüglich z_0 , wenn für alle $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von z_0 und z in G liegt.

Ist G ein bezüglich z_0 sternförmiges Gebiet, $f \in \mathcal{C}(G)$ und $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$ mit einem Eckpunkt in z_0 , dann ist f integrabel.

6 Cauchy'scher Integralsatz und Cauchy'sche Integralformel

Sei D eine offene Menge, dann bezeichnet $\mathcal{H}(D)$ die Menge aller auf D holomorphen Funktionen.

Das **Integrallemma von Goursat** besagt, dass für $f \in \mathcal{H}(G)$ und jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$ gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

Das gilt sogar für $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{z_0\})$ und jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$ mit einem Eckpunkt in z_0 .

Damit kann man den **Cauchy'schen Integralsatz** beweisen: Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und G ein sternförmiges Gebiet, so ist f integrabel.

Auch diese Aussage gilt für $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{z_0\})$, wenn G ein bezüglich z_0 sternförmiges Gebiet ist.

Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\} \subseteq G$, so gilt die **Cauchy'sche Integralformel**:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{für } |z-a| < r$$

Aus der Cauchy'schen Integralformel gewinnt man die **Mittelformel**:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) d\varphi$$

Außerdem kann man mit der Integralformel den **Satz von Cauchy-Taylor** beweisen: Ist $f \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\})$ mit $R > 0$, so lässt sich f um a in eine konvergente Potenzreihe entwickeln, und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - a)^n \quad \text{für } |z - a| < R$$

wobei

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$ heißt **lokal integrabel**, wenn für alle $z_0 \in G$ eine Umgebung U von z_0 existiert, so dass f auf U integrabel ist.

Nach dem **Satz von Morera** ist jede in einem Gebiet lokal integrable Funktion holomorph.

Zusammenfassend sind für eine Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$ folgende Aussagen äquivalent:

- (1) f ist holomorph auf G
- (2) Für jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$ gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$
- (3) f ist lokal integrierbar in G
- (4) Für jede Kreisscheibe B mit $B \cup \partial B \subseteq G$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{für } z \in B$$

- (5) f ist analytisch, d. h. f ist in jedem Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar

Bemerkung: Zur Anwendung kommt die Theorie der komplexen Integrale auch zur Berechnung von reellen Integralen, indem man über einen geeigneten (geschlossenen) Weg integriert, diesen in Teilstücke unterteilt, wobei das Integral über eines dieser Teilstücke (zumindest im Grenzwert) gleich dem gesuchten ist, und die anderen Integrale leicht berechnet werden können (siehe dazu auch Anhang A).

7 Wichtige Sätze über holomorphe Funktionen

Eine Funktion f heißt **ganz**, wenn gilt: $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Nach dem **Satz von Liouville** ist jede ganze und (dem Betrag nach) beschränkte Funktion konstant. Mit diesem Satz kann man beispielsweise den **Fundamentalsatz der Algebra** („Jedes nichtkonstante Polynom hat über \mathbb{C} eine Nullstelle.“) ziemlich schnell beweisen.

Nach dem **Identitätssatz** sind für $f, g \in \mathcal{H}(G)$ folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $f = g$ auf G
- (2) $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in G
- (3) $\exists a \in G : f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) \quad \text{für } n = 0, 1, 2 \dots$

Ist $M \subseteq \mathbb{C}$, so heißt ein Punkt $a \in M$ **isoliert** von M , wenn es eine Umgebung U von a gibt, sodass gilt: $U \cap M = \{a\}$.

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **diskret**, wenn jeder Punkt $a \in D$ isoliert von D ist. Weiters heißt $A \subseteq D$ **diskret** in D , wenn A in D keinen Häufungspunkt hat.

Der **Riemann'sche Fortsetzungssatz** besagt dann, dass für $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subseteq D$ diskret in D und $f \in \mathcal{H}(D \setminus A)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1) f lässt sich holomorph nach D fortsetzen, d. h. $\exists \hat{f} \in \mathcal{H}(D)$ mit $\hat{f}|_{D \setminus A} = f$
- (2) f lässt sich stetig nach D fortsetzen, d. h. $\exists \hat{f} \in \mathcal{C}(D)$ mit $\hat{f}|_{D \setminus A} = f$
- (3) f ist lokal um jedes $a \in A$ beschränkt
- (4) $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0 \quad \forall a \in A$

Das **Maximumsprinzip** besagt schließlich Folgendes: Existiert für $f \in \mathcal{H}(G)$ ein $a \in G$ mit $|f(a)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$, so ist f konstant.

Analog gilt das **Minimumsprinzip**: Existiert für $f \in \mathcal{H}(G)$ ein $a \in G$ mit $|f(a)| \leq |f(z)| \quad \forall z \in G$, so ist $f(a) = 0$ oder f konstant.

Für $f_n, f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt die Konvergenz $f_n \rightarrow f$ **kompakt** auf G , wenn f_n gegen f gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G konvergiert. Gleichbedeutend damit ist die **lokal gleichmäßige Konvergenz**, d. h. für alle $z \in G$ existiert eine Umgebung U von z , sodass f_n gegen f gleichmäßig auf U konvergiert.

Nach dem **Weierstraß'schen Konvergenzsatz** gilt für $f_n \in \mathcal{H}(G)$ ($n \in \mathbb{N}$) und $f_n \rightarrow f$ kompakt auf G , dass $f \in \mathcal{H}(G)$ und $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) kompakt auf G .

8 Cauchy'scher Integralsatz und Homotopie

Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ zwei geschlossene Kurven, so heißt γ_1 **homotop** zu γ_0 in G (in Zeichen: $\gamma_0 \sim \gamma_1$ bzw. $\gamma_0 \stackrel{G}{\sim} \gamma_1$), wenn es eine stetige Abbildung $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ gibt, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma(s, 0) &= \gamma_0(s) & \forall s \in [0, 1] \\ \Gamma(s, 1) &= \gamma_1(s) & \forall s \in [0, 1] \\ \Gamma(0, t) &= \Gamma(1, t) & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Ist G ein bezüglich z_0 sternförmiges Gebiet, so ist jede Kurve $\gamma \subseteq G$ homotop zur „konstanten Kurve“ γ_0 mit $\gamma_0(s) = z_0 \quad \forall s$.

Ist γ ein geschlossener Weg in G , so heißt γ **nullhomotop** in G (in Zeichen: $\gamma \sim 0$), wenn γ homotop zu einem konstanten Weg ist.

Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und sind γ_0, γ_1 geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Wege mit $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in G , so gilt nach dem **Satz von Cauchy (1. Homotopieversion)**:

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und γ ein geschlossener stückweise \mathcal{C}^1 -Weg mit $\gamma \sim 0$ in G , so gilt nach dem **Satz von Cauchy (2. Homotopieversion)**:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ zwei Kurven mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, so heißen γ_0 und γ_1 **homotop (mit festen Endpunkten)** in G , wenn gilt: $\gamma_0 - \gamma_1 \sim 0$ in G .

Der **Satz von der Wegunabhängigkeit** besagt, dass für $f \in \mathcal{H}(G)$ und γ_0, γ_1 stückweise \mathcal{C}^1 -Wege, die in G homotop mit festen Endpunkten sind, gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Ein Gebiet G heißt **einfach zusammenhängend**, wenn alle geschlossenen Wege in G nullhomotop in G sind.

Eine weitere Version des **Cauchy'schen Integralsatzes** lautet dann wie folgt: Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$, so gilt für jede geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Daraus folgt, dass für f und G wie oben, $f \neq 0$ auf G , eine Funktion $g \in \mathcal{H}(G)$ existiert, so dass gilt: $f(z) = e^{g(z)} \quad \forall z \in G$.

9 Cauchy'sche Integralformel und Umlaufzahlen

Ist γ eine geschlossene Kurve und $z \notin \gamma$, so heißt

$$\text{ind}(\gamma; z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

der **Index** (oder **Umlaufzahl** oder **Windungszahl**) von γ bezüglich z .

Es gilt:

- (1) $\text{ind}(\gamma; z) \in \mathbb{Z}$
- (2) $\text{ind}(\gamma; \cdot)$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma$
- (3) Sind γ_1, γ_2 zwei geschlossene Kurven mit einem gemeinsamen Punkt, so gilt:

$$\text{ind}(\gamma_1 + \gamma_2; z) = \text{ind}(\gamma_1; z) + \text{ind}(\gamma_2; z)$$

Die **Cauchy'sche Integralformel** lässt sich damit auch so formulieren: Für $f \in \mathcal{H}(G)$, $\gamma \sim 0$, $z \notin \gamma$ gilt:

$$\text{ind}(\gamma; z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

10 Weitere wichtige Sätze über holomorphe Funktionen

Für $f \in \mathcal{H}(G)$ heißt $a \in G$ **k -fache Nullstelle**, wenn gilt:

$$f(z) = (z - a)^k \cdot g(z) \quad \text{mit } g(a) \neq 0$$

k ist dann die **Vielfachheit** der Nullstelle.

Nach dem **Argumentprinzip** gilt für $f \in \mathcal{H}(G)$ mit den Nullstellen a_1, \dots, a_m (gemäß ihrer Vielfachheit aufgeschrieben), $\gamma \sim 0$, $a_j \notin \gamma \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m \text{ind}(\gamma; a_k)$$

Daraus folgt für $f \in \mathcal{H}(G)$, $\gamma \sim 0$ (wenn z_1, \dots, z_m die w_0 -Stellen von f bezeichnen):

$$\text{ind}(f \circ \gamma; w_0) = \sum_{k=1}^m \text{ind}(\gamma; z_k)$$

Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und hat f bei z_0 eine k -fache w_0 -Stelle ($k \in \mathbb{Z}^+$), so existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass $f(z) - w$ (für $w \in B(w_0, \delta)$) auf $B(z_0, \varepsilon)$ genau k Nullstellen besitzt, die alle einfach sind.

Nach dem **Satz von der offenen Abbildung** ist eine nichtkonstante Funktion $f \in \mathcal{H}(G)$ **offen**, d. h. das Bild jeder offenen Menge ist offen.

Jede injektive Abbildung $f \in \mathcal{H}(G)$, für die $f(G) = G'$ ein Gebiet ist, besitzt eine auf G' holomorphe Umkehrung. Eine derartige Funktion heißt **biholomorph** oder **schlicht**.

11 Singularitäten

$a \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singularität** von f , falls gilt:

$$\exists R > 0 : f \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < R\})$$

Eine isolierte Singularität $a \in \mathbb{C}$ von f heißt

- (1) **hebbar**, wenn sich f holomorph nach a fortsetzen lässt.
- (2) **Pol**, falls gilt: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.
- (3) **wesentlich**, wenn a weder hebbar noch ein Pol ist.

Ist $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ und $a \in \mathbb{C}$ ein Pol von f , so gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} \quad \text{für ein } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ und } g \in \mathcal{H}(G)$$

Ist $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$, $a \in \mathbb{C}$ ein Pol von f und $m \in \mathbb{Z}^+$ die kleinste positive natürliche Zahl, sodass $(z-a)^m \cdot f(z)$ beschränkt ist, so heißt m die **Ordnung** der Polstelle a .

Ist $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ und $a \in \mathbb{C}$ ein Pol m -ter Ordnung von f , dann existieren eindeutig bestimmte Koeffizienten $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ ($b_m \neq 0$) und eine eindeutig bestimmte Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{H}(G)$, so dass gilt:

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-a)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z-a)} + \tilde{f}(z) \quad \forall z \in G \setminus \{a\}$$

Sei $a_n \in \mathbb{C}$ und $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann definiert man:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}(z) \quad \forall z \in G \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ heißt **(absolut) konvergent**, wenn sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ (absolut) konvergent sind.

Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf G , wenn sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ als auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}(z)$ auf G gleichmäßig konvergent sind.

Ist $f \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2\})$, so gilt nach dem **Satz über Laurentreihen**:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n \quad \text{für } R_1 < |z-a| < R_2 \quad (\text{Laurentreihe})$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig und absolut in jedem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$ (mit $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$) ist,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad R_1 < r < R_2$$

und die Reihe eindeutig bestimmt ist. Man bezeichnet dann

$$f^-(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (z-a)^{-n}$$

als **Hauptteil** der Laurentreihe und

$$f^+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$$

als **Nebenteil** der Laurentreihe.

Ist $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - a)^n$ für $0 < |z - a| < R$, dann gilt:

- (1) a ist hebbar $\iff a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$
- (2) a ist Pol m -ter Ordnung $\iff a_{-m} \neq 0, a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = \dots = 0$
- (3) a ist wesentliche Singularität $\iff a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Nach dem **Satz von Casorati-Weierstraß** liegt für jede Umgebung U einer wesentlichen Singularität a von f das Bild $f(U \setminus \{a\})$ dicht in \mathbb{C} .

12 Residuensatz

Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - a)^n$ und a eine isolierte Singularität. Dann heißt

$$\text{res}(f; a) := a_{-1}$$

das **Residuum** von f bei a .

Der **Residuensatz** lautet: Sei f holomorph auf G bis auf (endlich viele) isolierte Singularitäten $a_1, \dots, a_m, \gamma \sim 0$ in G und $a_k \notin \gamma$ ($k = 1, \dots, m$). Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{ind}(\gamma; a_k) \cdot \text{res}(f; a_k)$$

Ist a ein Pol m -ter Ordnung, so erfolgt die **Berechnung** des Residuums von f bei a am besten gemäß der Beziehung

$$\text{res}(f; a) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m \cdot f(z))$$

Zur Anwendung kommt der Residuensatz beispielsweise bei der Berechnung von (reellen) Integralen und unendlichen Summen (siehe Anhang A und B).

Eine Funktion f heißt **meromorph** auf einem Gebiet G (in Zeichen: $f \in \mathcal{M}(G)$), wenn f bis auf Polstellen holomorph auf G ist.

Auch für meromorphe Funktionen gibt es ein **Argumentprinzip** (vgl. Seite 8): Sei f meromorph mit den Polstellen p_1, \dots, p_n und den Nullstellen a_1, \dots, a_m (jeweils gemäß ihrer Vielfachheit aufgeschrieben), $\gamma \sim 0$ und $p_j, a_k \notin \gamma$ für $j = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, m$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^m \text{ind}(\gamma; a_j) - \sum_{k=1}^n \text{ind}(\gamma; p_k)$$

Daraus folgt der **Satz von Rouché**: Seien $f, g \in \mathcal{M}(G)$, $\overline{B}(a; r) \subseteq G$, und f, g null- und polstellenfrei auf $\partial B(a; r)$. Weiters gelte

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{für } |z - a| = r$$

Dann folgt, dass die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Polstellen von f in $B(a; r)$ gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Polstellen von g in $B(a; r)$ ist.

13 Sätze über Funktionenfolgen

Der **Satz von Hurwitz** besagt, dass die Grenzfunktion f einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen f_n , die jeweils höchstens m Nullstellen besitzen ($m \in \mathbb{N}$ fest), ebenfalls höchstens m Nullstellen besitzt oder die Nullfunktion ist.

Eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{H}(G)$ heißt **lokal gleichmäßig beschränkt**, wenn gilt:

$$\forall z \in G : \exists U \in \mathfrak{U}(z), \exists c(z) \in \mathbb{R}^+ : |f_n(z)| \leq c(z) \quad \forall z \in U, \forall n \in \mathbb{N}$$

Der **Satz von Montel** besagt, dass jede lokal gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{H}(G)$ eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt. Für die kompakte Konvergenz einer derartigen Teilfolge genügt nämlich schon die punktweise Konvergenz dieser Teilfolge auf einer Menge D , die dicht in G liegt.

14 Produktsatz von Weierstraß & Satz von Mittag-Leffler

Für $w_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}$) sei das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} w_k$ wie folgt definiert:

$$\prod_{k=1}^{\infty} w_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n w_k$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Nach dem **Logarithmuskriterium** für die Konvergenz unendlicher Produkte gilt für $w_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($k \in \mathbb{N}$):

$$\prod_{k=1}^{\infty} w_k = w \neq 0 \iff \sum_{k=k_0}^{\infty} \log w_k \text{ konvergent}$$

Ein derartige unendliche Produkt heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Logarithmen absolut konvergiert. Es gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k) = z \neq 0 \text{ absolut konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$$

Mit diesen Vorbereitungen kann man den **Produktsatz von Weierstraß** beweisen: Sei a_n eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Dann existiert eine ganze Funktion f mit Nullstellen genau bei den a_k (mit entsprechender Vielfachheit).

Daraus folgt der **Faktorisierungssatz von Weierstraß**: Ist $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit den Nullstellen (a_n) , so lässt sich h schreiben als

$$h(z) = z^m \cdot \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \cdot e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m_n}} \right) \cdot e^{g(z)}$$

mit $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Außerdem folgt: $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : h = \frac{f}{g}$.

Der **Satz von Mittag-Leffler** liefert eine Aussage über die Existenz von meromorphen Funktionen mit vorgegebenen Polstellen und zugehörigen Hauptteilen: Sei (b_n) eine Folge von paarweise verschiedenen komplexen Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Weiters seien p_n Polynome mit $p_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit Polstellen genau bei den b_k , wobei der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von f bei b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ genau $p_k \left(\frac{1}{z-b_k} \right)$ ist.

Diese beiden Sätze kann man beispielsweise zur Bestimmung von Produktdarstellungen holomorpher Funktionen und von Partialbruchzerlegungen meromorpher Funktionen verwenden (siehe Anhang C und D).

15 Automorphismen

Eine Abbildung $f \in \mathcal{H}(G)$ heißt **Automorphismus** auf G , wenn f eine biholomorphe Abbildung von G auf G ist. Die Menge aller Automorphismen von G wird mit $\text{Aut}(G)$ bezeichnet.

Es gilt: $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.

Bezeichnet $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe, so besagt das **Schwarz'sche Lemma**, dass für $f \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt: $|f(z)| \leq |z|$.

Gilt außerdem $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, dann ist $f(z) = e^{iv} \cdot z$ mit $v \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe dieses Lemmas zeigt man:

$$\text{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \mid f(z) = e^{iv} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, v \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{E} \right\}$$

Allgemein heißen Funktionen aus der Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \wedge a, b, c, d \in \mathbb{C} \wedge ad \neq bc \right\}$$

Möbiustransformationen oder **Kreisverwandtschaften**. Diese Menge stellt übrigens (mit passender Definition des Holomorphiebegriffs) genau die Menge aller Automorphismen auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \infty$ dar.

16 Riemann'scher Abbildungssatz

Ein **Q-Gebiet** ist ein Gebiet G , das die **Quadratwurzeleigenschaft** besitzt:

$$\forall g \in \mathcal{H}(G), \text{ nullstellenfrei} : \exists h \in \mathcal{H}(G) : h^2(z) = g(z) \quad \forall z \in G$$

Ist $0 \in G \subseteq \mathbb{E}$, so heißt $\kappa : G \rightarrow \mathbb{E}$ **Dehnung** bezüglich 0, wenn gilt:

$$\kappa(0) = 0 \quad \wedge \quad |\kappa(z)| > |z| \quad \forall z \in G \setminus \{0\}$$

Der **Riemann'sche Abbildungssatz** lautet: Ist $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann lässt sich G biholomorph auf die Einheitskreisscheibe \mathbb{E} abbilden. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

- (1) Reduktion auf Q-Gebiete
- (2) Existenz von holomorphen Injektionen:

$$\begin{aligned} G \neq \mathbb{C} \text{ Q-Gebiet, } 0 \in G &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \text{ holomorphe Injektion } f : G \rightarrow \mathbb{E} \text{ mit } f(0) = 0 \end{aligned}$$

- (3) Existenz von Dehnungen (Quadratwurzelverfahren):

$$\begin{aligned} 0 \in G \subseteq \mathbb{E}, \quad G \text{ Q-Gebiet, } G \neq \mathbb{E} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \text{ Dehnung } \kappa : G \rightarrow \mathbb{E}, \text{ holomorph und injektiv} \end{aligned}$$

- (4) Existenzbeweis mittels Extremalprinzips:

$$\begin{aligned} 0 \in G \subseteq \mathbb{E}, \quad G \text{ Q-Gebiet,} \\ \mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(G) \mid f \text{ injektiv von } G \text{ nach } \mathbb{E}, f(0) = 0\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists h \in \mathcal{F} : h(G) = \mathbb{E} \end{aligned}$$

Eine Konstruktion dieser Abbildung ist zwar möglich, allerdings nicht mit dem oben skizzierten Beweis.

Außerdem lässt sich sagen, dass sich die biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ im Allgemeinen *nicht* (bi)holomorph auf ∂G fortsetzen lässt, da das ein Widerspruch zur Konformität von holomorphen Funktionen wäre.

Ist G allerdings beschränkt und $z_0 \in \partial G$ **erreichbar**, d. h. für jede Folge (z_n) aus G , die gegen z_0 konvergiert, gibt es eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$, $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1])$, und Punkte $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots < 1$ mit $\gamma(t_n) = z_n$, dann existiert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ für $z \in G$, d. h. f lässt sich *stetig* nach z_0 fortsetzen.

Sind z_1 und z_2 zwei erreichbare Randpunkte von G mit $z_1 \neq z_2$, und setzt man f stetig nach z_1 und z_2 fort, so gilt außerdem: $f(z_1) \neq f(z_2)$.

17 Harmonische Funktionen

Im Folgenden bezeichne Δ den **Laplace-Operator**, d. h.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Wie schon in Abschnitt 2 definiert, heißt eine Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ **harmonisch** auf G , wenn gilt: $\Delta u = 0$ auf G .

Ist $f \in \mathcal{H}(G)$, $f = u + iv$, dann heißen u und v **konjugiert harmonisch**.

Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und u harmonisch auf G , dann existiert (bis auf Addition einer rein imaginären Konstanten) genau ein $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $u = \operatorname{Re} f$.

Ist umgekehrt G ein Gebiet, für das gilt, dass jede auf G harmonische Funktion eine konjugiert harmonische Funktion besitzt, dann ist G einfach zusammenhängend.

Analog zu den holomorphen Funktionen gibt es auch für harmonische Funktionen $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Mittelwerteigenschaft**:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi}) d\varphi$$

wobei $B(a; r) \cup \partial B(a; r) \subseteq G$.

Außerdem gilt das **Maximumsprinzip**: Sei $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf G . Existiert eine Maximumsstelle $a \in G$, d. h.

$$u(x, y) \leq u(a) \quad \forall (x, y) \in G$$

dann ist u auf G konstant.

Daraus folgt, dass eine auf einem beschränkten Gebiet G harmonische Funktion u , die auch am Rand von G stetig ist, ihr Maximum am Rand annehmen muss.

Das **Dirichlet'sche Problem** ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } G \\ u|_{\partial G} &= \varphi(x) && \text{(Randbedingung)} \end{aligned}$$

Aus dem Maximumsprinzip für harmonische Funktionen folgt, dass es höchstens eine Lösung geben kann.

Ist G der Einheitskreis und $f : \partial\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann existiert ein stetiges $u : \mathbb{E} \cup \partial\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (1) $u(z) = f(z)$ auf $\partial\mathbb{E}$
- (2) u harmonisch auf \mathbb{E}

Diese Funktion u ist eindeutig bestimmt, und es gilt für $0 \leq r < 1$ und $\vartheta \in \mathbb{R}$:

$$u(r \cdot e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t) \cdot f(e^{it}) dt$$

wobei

$$P_r(\vartheta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\vartheta} = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\vartheta}}{1 - re^{i\vartheta}} \right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}$$

der sogenannte **Poisson'sche Kern** ist, für den gilt:

- (1) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta) d\vartheta = 1$
- (2) $P_r(\vartheta) > 0$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$
 $P_r(\vartheta) < P_r(\delta)$ für alle $0 < \delta < |\vartheta| \leq \pi$
- (3) $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\vartheta) = 0$ gleichmäßig für $0 < \delta < |\vartheta| \leq \pi$

Ist G einfach zusammenhängend und beschränkt, und besteht ∂G aus lauter erreichbaren Punkten, so kann man das Dirichlet Problem auf G auf eine Dirichlet-Problem auf \mathbb{E} transformieren: Es existiert eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$, die stetig auf ∂G fortgesetzt werden kann. So kann die Randbedingung auf G zu einer Randbedingung auf \mathbb{E} transformiert und das Problem nach der obigen Methode gelöst werden. Ist $u : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Dirichlet-Problems auf \mathbb{E} , so ist $v := u \circ f$ die Lösung des Dirichlet-Problems auf G .

Anhang

A Berechnung von Integralen

Mit Hilfe des Residuensatzes (siehe Seite 10) kann man einige (reelle) Integralen relativ leicht berechnen. Im Folgenden möchte ich einen kurzen Überblick über die wichtigsten Anwendungen geben.

A.1 Integrale der Gestalt $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$

Sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion, die endlich auf $\partial B(0, 1)$ ist, und die Kurve γ definiert als $\gamma(t) := e^{it} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt unter Berücksichtigung von $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx &= \int_{\gamma} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz} dz = \\ &= 2\pi \sum_{|w| < 1} \operatorname{res}\left(\frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right); w\right) \end{aligned}$$

A.2 Integrale der Gestalt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Ist f holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ bis auf endlich viele Singularitäten a_1, \dots, a_m ($a_k \notin \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, m$) und gilt $|f(z)| < \frac{c}{|z|^p}$ für ein $p > 1$ (für $|z|$ hinreichend groß), so folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}(f; a_k)$$

Man integriert nämlich $f(z)$ über $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1(t) := t \quad \forall t \in [-R, R]$ und $\gamma_2(t) := Re^{it} \quad \forall t \in [0, \pi]$, wobei R so groß gewählt ist, dass alle Singularitäten von f dem Betrag nach kleiner als R sind. Man erhält so:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}(f; a_k) = \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^{\pi} f(Re^{it}) \cdot Rie^{it} dt \end{aligned}$$

Schätzt man nun $\int_{\gamma_2} f(z) dz$ wie folgt ab, so folgt die Behauptung:

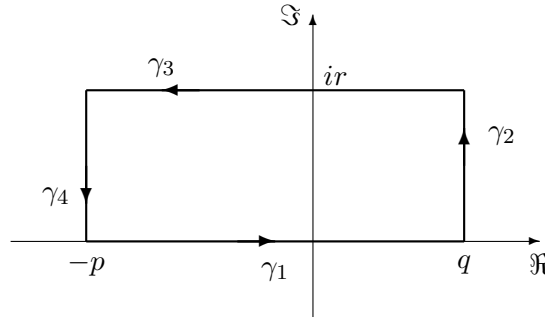
$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\pi} f(Re^{it}) \cdot Rie^{it} dt \right| \leq R\pi \cdot \frac{c}{R^p} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

A.3 Fouriertransformation

Ist f holomorph auf \mathbb{C} bis auf endlich viele Singularitäten a_1, \dots, a_m ($a_k \notin \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, m$) und gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, so ergibt sich folgende Formel für die **Fouriertransformation**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{isx} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{res}(f(z) \cdot e^{isz}; a_k) & \text{für } s > 0 \\ -2\pi i \sum_{\text{Im } a_k < 0} \text{res}(f(z) \cdot e^{isz}; a_k) & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

Integriert man nämlich $f(z)$ über ein Rechteck wie in der nebenstehenden Skizze (sofern $s > 0$, andernfalls muss man das Rechteck unterhalb der reellen Achse wählen), und lässt dann p, q und r simultan gegen ∞ streben (wobei $r := p + q$ zu setzen ist), so stellt man fest, dass gilt:



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{res}(f(z) \cdot e^{isz}; a_k) = \\ &= \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z) dz}_{\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{isx} dx} + \underbrace{\int_{\gamma_2} f(z) dz}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_3} f(z) dz}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_4} f(z) dz}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Ist $f(z)$ eine gerade Funktion, so kann man auch das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos sx dx$ berechnen, da dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{isx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos sx dx + i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin sx dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos sx dx + i \cdot \left(\int_{-\infty}^0 f(x) \sin sx dx + \int_0^{\infty} f(x) \sin sx dx \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos sx dx + i \cdot \left(\int_{-\infty}^0 f(x) \sin sx dx - \int_{-\infty}^0 f(x) \sin sx dx \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos sx \end{aligned}$$

Analog kann man das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin sx dx$ berechnen, sofern $f(z)$ eine ungerade Funktion ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{isx} dx = \dots = i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin sx$$

B Berechnung von unendlichen Summen

Der Residuensatz (siehe Seite 10) kann auch zur Berechnung von unendlichen Summen herangezogen werden, indem man ausnützt, dass zum Beispiel die Funktion $\frac{1}{\sin \pi z}$ Pole bei $z = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ hat. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f(z) \cdot \pi \cot \pi z; n) &= f(n) \\ \operatorname{res}\left(f(z) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z}; n\right) &= (-1)^n \cdot f(n) \end{aligned}$$

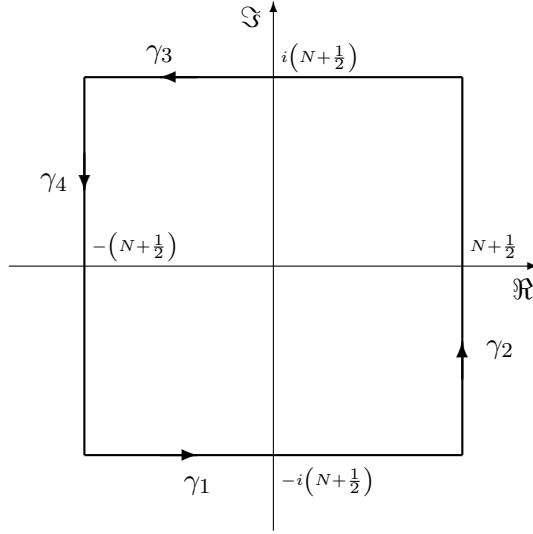
Ist f also holomorph auf \mathbb{C} bis auf endlich viele Singularitäten a_1, \dots, a_m ($a_k \notin \mathbb{Z}$) und gilt $|f(z)| < \frac{c}{|z|^p}$ für ein $p > 1$, so erhält man durch Integration von

$$g(z) := f(z) \cdot \pi \cot \pi z$$

bzw.

$$g(z) := f(z) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

über den nebenstehenden Weg:



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) dz &= 2\pi i \cdot \left(\sum_{k=1}^m \operatorname{res}(g; a_k) + \sum_{n=-N}^N \operatorname{res}(g; n) \right) = \\ &= \underbrace{\int_{\gamma_1} g(z) dz}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_2} g(z) dz}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_3} g(z) dz}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_4} g(z) dz}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

da nämlich (für $g(z) = f(z) \cdot \pi \cot \pi z$) gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_j} g(z) dz \right| &\leq \int_{-(N+\frac{1}{2})}^{N+\frac{1}{2}} \left| f\left(N + \frac{1}{2} + it\right) \cdot \pi \cot\left(\pi\left(N + \frac{1}{2} + it\right)\right) \right| \leq \\ &\leq (2N+1) \cdot \frac{c}{N^p} \cdot \tilde{c} \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

wobei die Existenz der Schranke \tilde{c} aus der Tatsache folgt, dass $\cot \pi z$ entlang des Integrationsweges beschränkt bleibt (analog für $g(z) = f(z) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z}$).

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= -\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{res}(f(z) \cdot \cot \pi z; a_k) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot f(n) &= -\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{res}\left(f(z) \cdot \frac{1}{\sin \pi z}; a_k\right) \end{aligned}$$

C Produktdarstellung holomorpher Funktionen

Der Produktsatz von Weierstraß (siehe Seite 12) kann zur Konstruktion von Produktdarstellungen holomorpher Funktionen verwendet werden:

Sei $f \in \mathcal{H}(G)$, $f \not\equiv 0$, mit einer m -fachen Nullstelle an 0 (wobei auch $m = 0$ zugelassen ist) und den weiteren Nullstellen a_1, a_2, a_3, \dots (die wegen $f \not\equiv 0$ keinen Häufungspunkt in \mathbb{C} haben), so kann man den Ansatz

$$f(z) = z^m \cdot \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \cdot e^{T_n(z)} \right) \right) \cdot e^{g(z)}$$

machen, wobei $g \in \mathcal{H}(G)$ und

$$T_n(z) := \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{z}{a_n} \right)^k$$

Da die Funktionen $T_n(z)$ genau die Taylorpolynome von $\log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right)$ sind, ist es für $|z| < r$ und n hinreichend groß (sodass $|a_n| > 2r$) sicher möglich, m_n so zu wählen, dass gilt

$$\left| \log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n} \cdot \left(\frac{z}{a_n} \right)^{m_n} \right| < \frac{1}{2^n}$$

In diesem Fall konvergiert die Summe

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{z}{a_n} \right)^k \right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\log \left(\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \cdot e^{T_n(z)} \right) \right)$$

und damit nach dem Logarithmuskriterium auch das obige Produkt.

Wenn es einem anschließend gelingt, die Funktion $g(z)$ zu bestimmen, so hat man eine komplette Produktdarstellung von $f(z)$ gewonnen.

Es gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} \sin \pi z &= \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \\ e^z - 1 &= ze^{\frac{z}{2}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2} \right) \end{aligned}$$

D Konstruktion meromorpher Funktionen

Analog zur Produktdarstellung holomorpher Funktionen kann man meromorphe Funktionen mit vorgegebenen Polstellen und zugehörigen Hauptteilen konstruieren, und zwar mit Hilfe des Satzes von Mittag-Leffler (siehe Seite 12).

Hat man die Polstellen b_1, b_2, b_3, \dots mit den zugehörigen Hauptteilen $h_n(z) := p_n \left(\frac{1}{z-b_n} \right)$ (p_n Polynom mit $p(0) = 0$) gegeben, so kann man ansetzen

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (h_n(z) - T_n(z))$$

wobei auch hier die $T_n(z)$ wieder als Taylorpolynom (diesmal von $h_n(z)$) so zu wählen sind, dass die Summe konvergiert.

Man erhält so beispielsweise

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \\ \frac{\pi}{\sin \pi z} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2z}{z^2 - n^2} \\ \pi \cot \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \end{aligned}$$

Index

- Argumentprinzip, 8, 10
- Automorphismus, 12
- \mathcal{C}^1 -Kurve, 2
- \mathcal{C}^1 -Weg, 2
- Casorati-Weierstraß, 10
- Cauchy'sche Integralformel, 4, 7
- Cauchy'scher Integralsatz, 4, 7
 - 1. Homotopieversion, 6
 - 2. Homotopieversion, 7
- Cauchy-Riemann'sche Diff.gl., 1
- Cauchy-Taylor, 4
- Dehnung, 13
- Dirichlet'sches Problem, 14
- Exponentialfunktion, 2
- Faktorisierungssatz von Weierstraß, 12
- Fouriertransformation, 17
- Fundamentalsatz der Algebra, 5
- Funktion
 - analytische, 2
 - biholomorphe, 8
 - differenzierbare, 1
 - ganze, 5
 - harmonische, 1, 14
 - holomorphe, 1
 - hyperbolische, 2
 - integrable, 3
 - konforme, 3
 - konjugiert harmonische, 14
 - lokal integrable, 4
 - meromorphe, 10
 - offene, 8
 - schlichte, 8
 - trigonometrische, 2
 - winkeltreue, 3
- Funktionsfolge
 - lokal gleichm. beschränkte, 11
- Gebiet, 2
 - einfach zusammenhängendes, 7
 - sternförmiges, 3
- Goursat, 4
- Homotopie, 6
- Hurwitz, 11
- Identitätssatz, 5
- Index, 7
- Integrallemma von Goursat, 4
- Konvergenz
 - absolute, 9
 - gleichmäßige, 9
 - kompakte, 6
 - lokal gleichmäßige, 6
- Kreisverwandschaft, 12
- Kurve, 2
 - nullhomotope, 6
- Kurven, homotope, 6, 7
- Kurvenintegral, 3
 - wegunabhängiges, 3
- Laplace-Operator, 14
- Laurentreihe, 9
 - Hauptteil der, 9
 - Nebenteil der, 9
- Liouville, 5
- Logarithmus, 2
 - Hauptzweig des, 2
 - Zweig des, 2
- Logarithmuskriterium, 11
- Möbiustransformation, 12
- Maximumsprinzip, 6, 14
- Menge, diskrete, 5
- Minimumsprinzip, 6
- Mittag-Leffler, 12
- Mittelformel, 4
- Mittelwerteigenschaft, 14
- Montel, 11
- Morera, 4
- Nullstelle, k -fache, 8
- Ordnung, 9
- Poisson'scher Kern, 15

Pol, 8
Produktsatz von Weierstraß, 12
Punkt, isolierter, 5

Q-Gebiet, 13
Quadratwurzeigenschaft, 13

Randpunkt, erreichbarer, 13
Residuensatz, 10
Residuum, 10
Riemann'sche Abbildungssatz, 13
Riemann'scher Fortsetzungssatz, 6
Rouché, 11

Satz
 über Laurentreihen, 9
 von Casorati-Weierstraß, 10
 von Cauchy-Taylor, 4
 von der offenen Abbildung, 8
 von der Wegunabhängigkeit, 7
 von Hurwitz, 11
 von Liouville, 5
 von Mittag-Leffler, 12
 von Montel, 11
 von Morera, 4
 von Rouché, 11

Schwarz'sches Lemma, 12
Singularität, isolierte, 8
 hebbare, 8
 wesentliche, 8
Stammfunktion, 3

Umlaufzahl, 7

Vielfachheit, 8

Weg, 2
 äquivalenter, 2
Weierstraß'scher Konvergenzsatz, 6
Windungszahl, 7
Winkel, 3