Maßtheorie

Eine Zusammenfassung von Bernhard Kabelka
zur Vorlesung von Prof. Grill im WS 2001/02

Version 1.06, 15. März 2004

Es sei ausdrücklich betont, dass

(1) dieses Essay ohne das Wissen und die Mitarbeit von Prof. Grill entstanden ist,

(2) trotz großer Anstrengungen seitens des Autors, eine möglichst fehlerfreie und vollständige Zusammenfassung zu liefern, sich Fehler eingeschlichen haben könnten (sollte jemand einen Fehler entdecken, so bittet der Autor um Benachrichtigung, vorzugsweise per eMail an bernhard@kabelka.net),

(3) die Lektüre dieser Zusammenfassung keinesfalls den persönlichen Besuch der Vorlesung bzw. das Studium des Skriptums ersetzen, sondern bestenfalls ergänzen kann.

Die aktuelle Version dieser Datei ist erhältlich unter:
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/masstheo.pdf`
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/analysis/download/masstheo.ps.gz`

Inhaltsverzeichnis

1 Mengensysteme

Sei eine **Grundmenge** Ω gegeben. Eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt dann **Mengenystem**.

Ein Mengensystem $\mathcal{S}$ heißt **σ-Algebra**, wenn gilt:

(1) $\mathcal{S} \neq \emptyset$

(2) $A \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad A^C \in \mathcal{S}$

(3) $A_n \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup A_n \in \mathcal{S}$

Es gilt in jeder σ-Algebra $\mathcal{S}$:

(1) $\emptyset \in \mathcal{S},\ \Omega \in \mathcal{S}$

(2) $A_n \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap A_n \in \mathcal{S} \qquad$ da $\bigcap A_n = \left(\bigcup A_n^C\right)^C$

Ist $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$ ein System von σ-Algebren über Ω, so ist $\mathcal{S} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$ wieder eine σ-Algebra über Ω.

Ist ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{C}$ gegeben, so heißt die kleinste σ-Algebra $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, die $\mathcal{C}$ enthält, **die von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra**.
So erzeugt beispielsweise das Mengensystem $\mathcal{C} = \{(a, b] \mid -\infty < a < b < +\infty\}$ die sogenannten **Borelmengen**.

Ein Mengensystem $\mathcal{R}_\sigma$ heißt **σ-Ring**, wenn gilt:

(1) $\mathcal{R}_\sigma \neq \emptyset$

(2) $A, B \in \mathcal{R}_\sigma \quad \Rightarrow \quad A\backslash B \in \mathcal{R}_\sigma$

(3) $A_n \in \mathcal{R}_\sigma \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup A_n \in \mathcal{R}_\sigma$

In jedem σ-Ring gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{R}_\sigma$

(2) $A_n \in \mathcal{R}_\sigma \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap A_n \in \mathcal{R}_\sigma$

Ein σ-Ring ist genau dann eine σ-Algebra, wenn gilt: $\Omega \in \mathcal{R}_\sigma$
Weiters gilt: $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\sigma) = \left\{A \subseteq \Omega \mid A \in \mathcal{R}_\sigma \quad \vee \quad A^C \in \mathcal{R}_\sigma\right\}$

Ein Mengensystem $\mathcal{R}$ heißt **Ring**, wenn gilt:

(1) $\mathcal{R} \neq \emptyset$

(2) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A\backslash B \in \mathcal{R}$

(3) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R}$

Ein Ring $\mathcal{A}$ heißt **Algebra**, wenn gilt: $\Omega \in \mathcal{A}$.

Ein Mengensystem $\mathcal{T}$ heißt **Semiring**, wenn gilt:

(1) $\mathcal{T} \neq \emptyset$

(2) $A, B \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{T}$

(3) $A, B \in \mathcal{T},\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} B \backslash A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \quad C_i \in \mathcal{T},\ C_i \text{ paarweise disj.} \\ A \cup \bigcup_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{T} \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\} \end{array}$

Den von einem Semiring $\mathcal{T}$ **erzeugten Ring** erhält man so:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{T}) &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\middle|\; A_i \in \mathcal{T} \right\} \\ &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\middle|\; A_i \in \mathcal{T}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j \right\} \end{aligned}$$

Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt **monotones System**, wenn es gegenüber dem Limes monotoner Folgen abgeschlossen ist.

Ist $\mathcal{R}$ ein Ring, so gilt: $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{R})$.

Hat man zwei Grundmengen Ω_1, Ω_2 und einen Ring $\mathcal{R}_2$ (bzw. eine Algebra, einen σ-Ring oder eine σ-Algebra) über Ω_2 sowie eine Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ gegeben, so ist $\mathcal{R} := f^{-1}(\mathcal{R}_2) = \left\{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{R}_2 \right\}$ wieder ein Ring (bzw. eine Algebra, ein σ-Ring oder eine σ-Algebra).

Hat man einen Ring $\mathcal{R}$ über Ω und eine Teilmenge A von Ω gegeben, so ist die **Spur** $\mathrm{sp}_A(\mathcal{R})$ von $\mathcal{R}$ auf A $\mathrm{sp}_A(\mathcal{R}) = A \cap \mathcal{R} := \{A \cap B \mid B \in \mathcal{R}\}$ wieder ein Ring.

2 Maßfunktionen

Ist $\mathcal{C}$ ein Mengensystem, so heißt eine Funktion $\mu : \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}$ ($\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$) **Mengenfunktion**.

Eine Mengenfunktion μ heißt **additiv**, wenn gilt:

$$A_i \in \mathcal{C} \text{ disjunkt } \wedge \quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Eine Mengenfunktion μ ist sogar ***σ*-additiv**, wenn obige Bedingung auch für abzählbare Vereinigungen gilt.

Eine Mengenfunktion μ auf $\mathcal{C}$ heißt **Maßfunktion**, wenn gilt:

(1) μ ist σ-additiv

(2) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{C}$

Ist $\mathcal{T}$ ein Semiring und μ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{T}$, so ist μ genau dann additiv, wenn gilt:

$$A, B \in \mathcal{T} \text{ mit } A \cap B = \emptyset \text{ und } A \cup B \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Definiert man auf $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ die Funktion μ^* mittels

(1) $A \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) := \mu(A)$

(2) $A \in \mathcal{R}(\mathcal{T})$, d. h. $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$ mit $B_i \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) := \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$

so ist μ^*eine Maßfunktion auf $\mathcal{R}(\mathcal{T})$, falls μ ein Maß auf $\mathcal{T}$ ist.

Ist μ eine nicht-negative, additive Mengenfunktion auf dem Ring $\mathcal{R}$, so ist μ **monoton**, d. h. es gilt: $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B)$, und es gilt das **Additionstheorem**:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=i}} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

Weiters gilt die **Ungleichung von Bonferroni**:

Definiert man $\beta_k := \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \cdot \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=i}} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &\leq \beta_k \qquad \text{falls k ungerade} \qquad \text{bzw.} \\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &\geq \beta_k \qquad \text{falls k gerade} \end{aligned}$$

Eine nicht-negative, additive Mengenfunktion heißt

- **endlich**, wenn gilt: $\mu(A) < +\infty \quad \forall\, A \in \mathcal{C}$
- $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich**, wenn gilt: $\forall\, A \in \mathcal{C}:\; A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n,\; E_n \in \mathcal{C}:\; \mu(E_n) < +\infty$
- **total** $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich**, wenn gilt: $\exists\, E_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(E_n) < +\infty \;:\; \Omega = \bigcup E_n$.

Der **Fortsetzungssatz** besagt, dass ein Maß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ zu einem Maß $\bar{\mu}$ auf dem erzeugten σ-Ring $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzbar ist, d. h. $\bar{\mu}$ stimmt auf $\mathcal{R}$ mit μ überein. Falls μ σ-endlich ist, ist diese Fortsetzung sogar eindeutig.

Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ heißt **äußere Maßfunktion**, wenn gilt:

(1) $\mu^*(A) \geq 0 \quad \forall\, A \subseteq \Omega$

(2) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(3) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(4) $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$

Die letzte Eigenschaft bezeichnet man als **$\boldsymbol{\sigma}$-Subadditivität**.

Ist μ ein Maß auf einem Ring, so heißt μ^* mit

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \;\middle|\; E_n \in \mathcal{R},\ A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\}$$

die **von $\boldsymbol{\mu}$ erzeugte äußere Maßfunktion**.

Nach der **Messbarkeitsdefinition nach Caratheodory** heißt eine Menge $A \subseteq \Omega$ **$\boldsymbol{\mu^*}$-messbar**, wenn $\forall\, C \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \backslash A)$$

Die Menge $\mathcal{M} := \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$ heißt dann der **$\boldsymbol{\sigma}$-Ring der $\boldsymbol{\mu^*}$-messbaren Mengen**, und es gilt: $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ ist ein Maß auf $\mathcal{M}$.
Ist außerdem μ^* von einem Maß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ erzeugt, so gilt außerdem:

(1) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$

(2) $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{R}$

Hat man eine σ-Algebra $\mathcal{S}$ über der Grundmenge Ω gegeben, so heißt das Paar $(\Omega,\, \mathcal{S})$ **Messraum**. Ist zusätzlich noch ein Maß μ auf $\mathcal{S}$ definiert, so heißt das Tripel $(\Omega,\, \mathcal{S},\, \mu)$ **Maßraum**.

Ein σ-Ring $\mathcal{S}$ mit dem Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$\forall\, N \in \mathcal{S} \text{ mit } \mu(N) = 0 \,:\, M \subseteq N \,\Rightarrow\, M \in \mathcal{S}$$

Die Menge $\mathcal{V}(\mathcal{S}) := \{A \cup M \mid A \in \mathcal{S},\, M \subseteq N \in \mathcal{S} \text{ mit } \mu(N) = 0\}$ ist dann die **Vervollständigung des $\boldsymbol{\sigma}$-Ringes $\boldsymbol{\mathcal{S}}$**.

Ist μ ein total σ-endliches Maß auf dem Ring $\mathcal{R}$, so gilt:

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\} = \mathcal{V}(\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R}))$$

Schließlich besagt der **Approximationssatz**, dass für $A \in \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$ mit endlichem Maß μ(A) (μ sei die Erweiterung der auf dem Ring $\mathcal{R}$ definierten σ-endlichen Maßfunktion) gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, C_\varepsilon \in \mathcal{R} : \quad \mu(A \triangle C_\varepsilon) < \varepsilon$$

3 Lebesgue-Stieltjes-Maße auf $\mathbb{R}^m$

Eine Maßfunktion μ auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ bzw. $(\bar{\mathbb{R}}^m, \bar{\mathcal{B}}_m)$ heißt **Lebesgue-Stieltjes-Maß**, wenn sie jeder beschränkten Menge ein beschränktes Maß zuordnet.

Eine Funktion $F : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty]$ heißt dann **Verteilungsfunktion** für μ, wenn gilt: $\mu\left((a,b]\right) = F(b) - F(a)$

Es gilt: F ist genau dann eine Verteilungsfunktion, wenn gilt:

(1) $\displaystyle\sum_{e \in \{0,1\}^m} F(b \star (1-e) + a \star e) \cdot (-1)^{\sum_{i=1}^m e_i} \geq 0$

(2) F ist rechtsseitig stetig

(wobei $\star$ die komponentenweise Multiplikation zweier Vektoren bezeichnet).

Es existiert zu jedem Lebesgue-Stieltjes-Maß μ zumindest eine Verteilungsfunktion. Gibt es zu einem bestimmten Maß μ zwei Verteilungsfunktionen F und F', so gilt:

$$F' = F + \sum_{i=1}^{m} G_i \qquad \text{mit von } x_i \text{ unabhängiger Funktion } G_i$$

Wählt man als Verteilungsfunktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m$, so erhält man das **Lebesgue-Maß** $\lambda_m\left((a,b]\right) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$, das auf den Borelmengen $\mathcal{B}_m$ definiert ist. Vervollständigt man $\mathcal{B}_m$ bzw. λ_m, so erhält man das **System der Lebesgue-messbaren Mengen**:

$$\mathcal{L}_m = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{B}_m,\ N \subseteq M \in \mathcal{B}_m \ :\ \lambda_m(M) = 0\}$$

Nach dem **Approximationssatz** gilt für ein Lebesgue-Stieltjes-Maß μ und $A \in \mathcal{B}_m$:

(1) $\mu(A) = \inf\{\mu(\mathcal{O}) \mid A \subseteq \mathcal{O},\ \mathcal{O} \text{ offen}\}$

(2) $\mu(A) = \sup\{\mu(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \subseteq A,\ \mathcal{C} \text{ kompakt}\}$

Es gelten folgende Sätze, die einem helfen können zu ermitteln, ob eine Funktion Verteilungsfunktion ist:

(1) Sind F_1 und F_2 zwei eindimensionale Verteilungsfunktionen, so ist die Funktion $F(x_1, x_2) := F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$ eine zweidimensionale Verteilungsfunktion.

(2) Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion F in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale Verteilungsfunktion, wenn gilt:

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \geq 0$$

4 Messbare Funktionen

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **stetig**, wenn für offenes $O \subseteq B$ das Urbild $f^{-1}(O)$ ebenfalls offen ist.

Seien $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ zwei Messräume. Eine Funktion $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt dann **$\boldsymbol{\mathcal{S}_1}$-$\boldsymbol{\mathcal{S}_2}$-messbar**, wenn gilt:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1 \quad \forall\, A \in \mathcal{S}_2$$

Ist $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ sogar ein Borel'scher Maßraum, so heißt f **$\boldsymbol{\mathcal{S}_1}$-messbar**, ist auch $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ ein Borel'scher Maßraum, so spricht man von einer **Borel-messbaren** Funktion.
Ist $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$, $\mathcal{S}_i = \mathcal{L}_{m_i} \cap \Omega_i$, dann nennt man f **Lebesgue-messbar**.

Ist $\mathcal{C}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{S}_2$ (d. h. $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{S}_2$), dann genügt als Messbarkeitsbedingung: $f^{-1}(C) \in \mathcal{S}_1 \quad \forall\, C \in \mathcal{C}$.

Angewandt auf eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ liefert das:

$$\begin{aligned}
f : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \quad &\iff \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \le c\} \in \mathcal{S} \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \{x \in \Omega \mid f(x) < c\} \in \mathcal{S} \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \{x \in \Omega \mid f(x) < c\} \in \mathcal{S} \quad \forall\, c \in \mathbb{Q} \\
&\iff \quad f^{-1}(O) \in \mathcal{S} \quad \forall\, O \text{ offen} \\
&\iff \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{S} \quad \forall\, A \text{ abgeschlossen}
\end{aligned}$$

Die Zusammensetzung $f \circ g : (\Omega_1, \mathcal{S}_1) \to (\Omega_3, \mathcal{S}_3)$ zweier messbarer Funktionen $f : (\Omega_1, \mathcal{S}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ und $g : (\Omega_2, \mathcal{S}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{S}_3)$ ist wieder messbar.

Ist $\Omega_i = \mathbb{R}^{m_i}$ und $\mathcal{S}_i = \mathcal{B}_{m_i}$, so kann man $f : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$ schreiben als $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{m_2})$ und es gilt:

$$f \text{ messbar} \quad \iff \quad f_i \text{ messbar} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$$

Das System $\mathcal{F} := \big\{f : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})\big\}$ aller $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen ist abgeschlossen bezüglich aller arithmetischer Operationen und gegenüber der Bildung punktweiser Grenzwerte.

$\mathcal{S}$-messbar sind:

- alle Indikatorfunktionen $I_A(x)$
- alle Treppenfunktionen $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot I_{A_i}(x)$
- alle punktweisen Grenzwerte von Treppenfunktionen

Es gilt sogar: Jede messbare Funktion lässt sich als punktweiser Grenzwert von Treppenfunktionen darstellen.

Das System $\mathcal{F} := \{f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\}$ aller Borel-messbaren Funktionen ist das kleinste System, das alle stetigen Funktionen enthält und gegenüber der punktweisen Grenzwertbildung abgeschlossen ist.

Sind $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume, und f eine $\mathcal{S}_1$-$\mathcal{S}_2$-messbare Funktion , so heißt f **maßtreu** wenn gilt:

$$\mu_1(f^{-1}(A)) = \mu_2(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{S}_2$$

Sei $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ ein Maßraum und $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ ein Messraum, und $f : (\Omega_1, \mathcal{S}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{S}_2)$. Das auf $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ durch

$$\tilde{\mu}(A) := \mu_1(f^{-1}(A)) \quad \forall\, A \in \mathcal{S}_2$$

definierte Maß $\tilde{\mu}$ heißt **das von f auf $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ induzierte Maß**.

Eine Aussage für $\omega \in \Omega$ gilt **μ-fast überall**, wenn gilt:

$$\exists\, N \in \mathcal{S} : \ \mu(N) = 0 \ \wedge \ \text{Aussage gilt für } N^C$$

Man erklärt dann die **Konvergenz μ-fast überall** wie folgt:

$$f_n \to f \quad \mu\text{-f.ü.} \quad :\Longleftrightarrow \quad \mu\left(\{\omega \mid f_n \not\to f\}\right) = 0$$

Die **gleichmäßige Konvergenz μ-fast überall** ist für (μ-fast überall) endliche Funktionen f_n, f wie folgt definiert:

$$\exists\, N \in \mathcal{S} : \quad \mu(N) = 0 \ \wedge \ f_n \to f \text{ glm.} \,\forall\, x \in N^C$$

Die **fast gleichmäßige Konvergenz** $f_n \to f$ ist erklärt durch:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists\, A_\varepsilon \in \mathcal{S} \ \text{ mit } \ \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon \ : \quad f_n \to f \text{ glm. auf } A_\varepsilon^C$$

Der **Satz von Egoroff** besagt, dass für endliche Maßräume aus der Konvergenz μ-fast überall die fast gleichmäßige Konvergenz folgt.
Die Umkehrung dieses Satzes gilt sogar auf beliebigen Maßräumen.

Ist $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, so gilt:

$$\begin{aligned} f_n \to f \ \mu\text{-fast überall} \quad \Longleftrightarrow \quad & \mu((B_n(\varepsilon))^C) \to 0 \\ & \text{mit} \quad (B_n(\varepsilon))^C := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k(\varepsilon) \\ & \text{und} \quad A_k(\varepsilon) := \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

Man nennt eine Folge $\{f_n\}$ gegen f **konvergent im Maß**, wenn gilt:

$$\mu\left(\{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \to 0$$

Ist eine Folge fast gleichmäßig konvergent, so konvergiert sie im Maß.

Eine Folge $\{f_n\}$ heißt **Cauchyfolge im Maß**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{m,n\to\infty} \mu\left(\{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Ist $\{f_n\}$ eine Cauchyfolge im Maß, so gibt es eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}$, die fast gleichmäßig konvergiert.

Jede Cauchyfolge im Maß konvergiert im Maß.

Zusammenfassung:

$$\begin{tikzcd}
\text{gleichmäßige Konvergenz} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{fast gleichmäßige Konvergenz} \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & \text{Konvergenz } \mu\text{-fast überall} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\mu \text{ endlich}"] \\
\text{Konvergenz im Maß} \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\text{Teilfolge}"] &
\end{tikzcd}$$

Für jede dieser Konvergenzarten ist die Grenzfunktion fast überall eindeutig bestimmt, d. h.:

$$f_n \to f \quad \text{und} \quad f_n \to g \quad \Rightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-fast überall}$$

5 Das Integral

Ist $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, so ist das **Integral einer Indikatorfunktion** definiert als:

$$\int I_A \, d\mu \; := \; \mu(A) \qquad \forall\, A \in \mathcal{S}$$

Das **Integral einer Treppenfunktion** lautet dann:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot I_{A_i} \right) d\mu \; := \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i)$$

Man nennt das Integral $\int_A f \, d\mu = \int I_A \cdot f \, d\mu$ auch **unbestimmtes Integral**.

Man sagt, das Integral $\int f \, d\mu$ **existiert**, wenn es berechnet werden kann (d. h. nicht von der Form „$\infty - \infty$“ ist).
Ist zusätzlich $\left|\int f \, d\mu\right| < \infty$, so heißt f **integrierbar**.

Da jede messbare Funktion Grenzwert von Treppenfunktionen ist, kann man das **Integral einer nichtnegativen Funktion** auf folgende zwei Arten (äquivalent) definieren:

- $t_n \nearrow f$ $\qquad$ t_n Treppenfunktionen, $t_n \geq 0$

  $$\int f\,d\mu \;:=\; \lim_{n\to\infty} \int t_n\,d\mu$$

- $$\int f\,d\mu \;:=\; \sup\left\{ \int t\,d\mu \;\middle|\; 0 \leq t \leq f,\; t \text{ Treppenfunktion} \right\}$$

Das **Integral einer allgemeinen Funktion** kann man dann wie folgt berechnen:

$$f = (f)_+ - (f)_-$$

$$\int f\,d\mu \;:=\; \int (f)_+\,d\mu \;-\; \int (f)_-\,d\mu$$

Das Integral hat folgende Eigenschaften:

- **Homogenität**: $\int (\alpha \cdot f)\,d\mu \;=\alpha \cdot \int f\,d\mu$
- **Additivität**: $\int (f+g)\,d\mu \;= \int f\,d\mu \;+\; \int g\,d\mu$
- **Monotonie**: $f \leq g$ messbar $\quad\Rightarrow\quad \int f\,d\mu \;\leq\; \int g\,d\mu$

Ist $f \geq 0$, so wird durch

$$\nu(A) := \int_A f\,d\mu$$

eine Maßfunktion definiert. Im allgemeinen Fall erhält man zumindest eine σ-additive Mengenfunktion.

Der **Satz von der monotonen Konvergenz** besagt, dass für eine monotone nichtfallende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen f_n gilt:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

In seiner erweiterten Fassung gilt dieser Satz auch für eine monotone nichtfallende Folge von Funktionen f_n mit:

$$f_n \geq g \;\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \;\int g\,d\mu \;> -\infty$$

Das **Lemma von Fatou** besagt, dass für eine Folge messbarer Funktionen f_n gilt:

(1) $f_n \geq g$, g messbar mit $\int g\,d\mu \;> -\infty$

$$\Rightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \;\geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

(2) $f_n \leq g$, g messbar mit $\int g \, d\mu < +\infty$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt der **Satz von der dominierten Konvergenz**:

> Gilt für die Folge messbarer Funktionen f_n die Ungleichung $|f_n| \leq g$ (g messbar und integrierbar) μ-fast überall, so folgt aus der Konvergenz $f_n \to f$ (f messbar) μ-fast überall:
>
> $$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Eine Mengenfunktion ν auf einer σ-Algebra $\mathcal{S}$ heißt **signierte Maßfunktion**, wenn gilt:

(1) $\nu(\emptyset) = 0$

(2) $\nu : \mathcal{S} \to (-\infty, +\infty]$ oder $\nu : \mathcal{S} \to [-\infty, +\infty)$

(3) A_n disjunkt $\quad \Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in N} \nu(A_n)$

Ist die signierte Maßfunktion ν ein unbestimmtes Integral $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, so kann man ν darstellen als die Differenz der beiden Maßfunktionen $\nu_+(A) = \int_A f_+ \, d\mu$ und $\nu_-(A) = \int_A f_- \, d\mu$.

Für eine stetige Funktion f und eine Verteilungsfunktion F mit den endlich vielen Sprüngen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, die dazwischen jeweils stetig differenzierbar ist, gilt (mit $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$):

$$\int f \, d\mu_F = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (F(x_i) - F(x_i^-)) + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot F'(x) \, dx$$

Ist f Riemann-integrierbar, dann gilt:

(1) f ist Lebesgue-integrierbar

(2) $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x) \, d\lambda(x) = \int_a^b f(x) \, dx$

6 Integrationsregeln

Ist $\{f_\alpha \mid \alpha \in [a,b]\}$ eine Familie μ-fast überall messbarer Funktionen, die im Punkt α_0 stetig vom Parameter abhängt (d. h. es gilt $\lim_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(x) = f_{\alpha_0}(x)$ μ-fast überall), und gibt es ein g mit $|f_\alpha(x)| \leq g(x) \quad \forall\, \alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ (mit $\int g < +\infty$), so gilt:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int f_\alpha(x)\, d\mu(x) \;=\; \int \lim_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(x)\, d\mu(x) \;=\; \int f_{\alpha_0}(x)\, d\mu(x)$$

Ist $f_\alpha(x)$ μ-fast überall nach α differenzierbar (d. h. es existiert $\frac{\partial}{\partial\,\alpha} f_\alpha(x) \quad \forall\,\alpha \in [a,b] \quad \forall\, x$ außer in einer Nullmenge), und gibt es ein g mit $\left|\frac{\partial}{\partial\,\alpha} f_\alpha(x)\right| \leq g(x)$ $\forall\,\alpha \in [a,b]$ (mit $\int g < +\infty$), so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial\,\alpha} \int f_\alpha(x)\, d\mu(x) \;=\; \int \frac{\partial}{\partial\,\alpha} f_\alpha(x)\, d\mu(x) \quad \alpha \in (a,b)$$

Sei $(\Omega_1,\, \mathcal{S}_1,\, \mu_1)$ ein Maßraum und $(\Omega_2,\, \mathcal{S}_2)$ ein Messraum. Weiters sei die Funktion $T : (\Omega_1,\, \mathcal{S}_1) \to (\Omega_2,\, \mathcal{S}_2)$ gegeben, sowie die bezüglich $\mu_2(A) := \mu_1(T^{-1}(A))$ integrierbare Funktion $f : (\Omega_2,\, \mathcal{S}_2) \to (\mathbb{R},\, \mathcal{B})$. Dann gilt:

$$\int f\, d\mu_2 \;=\; \int f \circ T\, d\mu_1 \qquad\qquad (\textbf{Substitutionsregel})$$

Ist $\nu(A) := \int_A g\, d\mu$ $(g \geq 0)$, so gilt:

$$\int f\, d\nu \;=\; \int f \cdot g\, d\mu$$

Ist $\mu_2(A) := \int_A g\, d\nu$, so gilt:

$$\int f \circ T\, d\mu_1 \;=\; \int f \cdot g\, d\nu$$

Als Sonderfall erhält man:

$$\int (f \circ G) \cdot G'\, d\lambda \;=\; \int f\, d\lambda$$

7 Produkträume

Sind $(\Omega_1,\, \mathcal{S}_1,\, \mu_1)$ und $(\Omega_2,\, \mathcal{S}_2,\, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume, so gibt es ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß μ auf

$$\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) = \mathcal{R}_\sigma\left(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{S}_1 \;\; \wedge \;\; A_2 \in \mathcal{S}_2\}\right)$$

für das gilt:

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B) \qquad \forall\, A \in \mathcal{S}_1, \quad \forall\, B \in \mathcal{S}_2$$

Man nennt μ (manchmal auch geschrieben als $\mu_1 \times \mu_2$) das **Produktmaß** von μ_1 und μ_2 und $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2, \mu)$ den **Produktraum** von $(\Omega_1,\, \mathcal{S}_1,\, \mu_1)$ und $(\Omega_2,\, \mathcal{S}_2,\, \mu_2)$.

Man kann μ nun auf zwei verschiedene Arten herleiten:

- Erweiterung des Maßes $\mu_1 \times \mu_2$ auf $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ (Semiring) auf den erzeugten σ-Ring
- $(\mu_1 \times \mu_2)(A) = \displaystyle\int \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x) \;=\; \int \mu_1(A^y)\, d\mu_2(y)$
  mit $A_x := \{y \mid (x, y) \in A\}$ und $A^y := \{x \mid (x, y) \in A\}$

Der **Satz von Fubini** macht eine Aussage über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

> Sind $(\Omega_1,\, \mathcal{S}_1,\, \mu_1)$ und $(\Omega_2,\, \mathcal{S}_2,\, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume und ist f eine messbare Funktion auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, so gilt:
>
> (1) $f \geq 0 \quad \Rightarrow$
>
> $$\int f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int \left(\int f\, d\mu_1 \right) d\mu_2 \;=\; \int \left(\int f\, d\mu_2 \right) d\mu_1$$
>
> (2) f integrierbar $\quad \Rightarrow$
>
> (a) $f(x, y)$ als Funktion von x ist für μ_2-fast alle y integrierbar
>
> (b) $\int f(x, y)\, d\mu_1(x)$ ist μ_2-fast überall messbar und integrierbar bezüglich μ_2
>
> (c) $\int f\, d(\mu_1 \times \mu_2) \;=\; \int \left(\int f\, d\mu_1 \right)\, d\mu_2$
>
> (analog mit vertauschten Rollen)
>
> (3) f integrierbar $\quad \Longleftrightarrow$
>
> $$\int |f|\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int \left(\int |f|\, d\mu_1 \right) d\mu_2 \;<\; +\infty$$

8 Signierte Maße

Ist $(\Omega,\, \mathcal{S})$ ein Messraum und ν eine signierte Maßfunktion auf $(\Omega,\, \mathcal{S})$ so heißt $A \in \mathcal{S}$ **positiv**, wenn für jede messbare Teilmenge B von A gilt: $\nu(B) \geq 0$. Analog heißt $A \in \mathcal{S}$ **negativ**, wenn für jede messbare Teilmenge B von A gilt: $\nu(B) \leq 0$.

Eine Zerlegung $(P{,}N)$ von Ω in eine positive Menge P und eine negative Menge N heißt **Hahn-Zerlegung**.

Zwei Maßfunktionen μ_1 und μ_2 heißen **zueinander singulär** (in Zeichen: $\mu_1 \perp \mu_2$), wenn es eine Menge A gibt mit $\mu_1(A) = \mu_2(A^C) = 0$.

Ist ein signiertes Maß ν darstellbar als Differenz zweier singulärer Maßfunktionen μ_1 und μ_2, so nennt man (μ_1, μ_2) eine **Jordan-Zerlegung** von ν.

Der **Zerlegungssatz von Hahn** sagt aus, dass es zu jeder signierten Maßfunktion ν eine Hahn-Zerlegung gibt.

Analog besagt der **Zerlegungssatz von Jordan**, dass es zu jeder signierten Maßfunktion ν eine Jordan-Zerlegung gibt.

In einer Jordan-Zerlegung (μ^+, μ^-) von μ heißt μ^+ die **positive Variation** von μ, μ^- die **negative Variation** von μ. Die Maßfunktion $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ nennt man dann **Totalvariation**.

Eine Maßfunktion ν heißt **absolut stetig** bezüglich einer Maßfunktion μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), wenn gilt:

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jedes endliche System disjunkter halboffener Intervalle $\{(a_i, b_i] \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ mit $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

Für ein Lebesgue-Stieltjes-Maß μ_F mit der beschränkten Verteilungsfunktion F und das Lebesgue-Maß λ gilt dann:

$$\mu_F \ll \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad F \text{ absolut stetig}$$

Der **Satz von Radon-Nikodym** besagt, dass für einen σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ und eine beliebige Maßfunktion ν auf $(\Omega, \mathcal{S})$, die absolut stetig bezüglich μ ist, eine μ-fast überall eindeutig bestimmte nichtnegative messbare Funktion f existiert, so dass gilt:

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

f wird oft mit $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ bezeichnet und **Radon-Nikodym-Ableitung** von ν nach μ oder auch **Radon-Nikodym-Dichte** genannt.

Ist $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und ν eine beliebige Maßfunktion auf $(\Omega, \mathcal{S})$ so gibt es genau ein Paar von Maßfunktionen ν_1, ν_2, so dass gilt:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \qquad \text{mit} \quad \nu_1 \ll \mu \,, \quad \nu_2 \perp \mu$$

Diese Zerlegung nennt man dann die **Lebesgue-Zerlegung** von ν bezüglich μ.

9 $\mathcal{L}_p$-Räume

Sei $(\Omega,\, \mathcal{S},\, \mu)$ ein Maßraum. Eine messbare Funktion f heißt dann ***p*-fach integrierbar**, wenn gilt:

$$\int |f|^p \, d\mu \;<\; \infty \qquad (p \geq 1)$$

Die Menge $\mathcal{L}_p$ aller p-fach integrierbaren Funktionen bildet dann einen Vektorraum. Der Faktorraum $L_p := \mathcal{L}_p/_\sim$ (mit $f \sim g \iff f = g$ μ-fast überall) ist dann ein normierter Vektorraum mit der Norm $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Eine Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt:

$$f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y) \qquad \forall\, \lambda \in [0,1] \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Erfüllt eine Funktion die umgekehrte Ungleichung, so nennt man sie **konkav**.

Die **Ungleichung von Jensen** besagt, dass für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, eine integrierbare Funktion g und eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f\left(\int g \, dP\right) \leq \int f \circ g \, dP$$

Für konkaves f gilt die umgekehrte Ungleichung.

Die **Ungleichung von Hölder** besagt, dass für einen Maßraum $(\Omega,\, \mathcal{S},\, \mu)$, $p,\, q \in (1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$ gilt:

$$f \cdot g \in \mathcal{L}_1 \quad \text{und} \int |f \cdot g| \, d\mu \leq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Die **Ungleichung von Minkowski** besagt, dass für $f,\, g \in \mathcal{L}_p$ auch $f + g \in \mathcal{L}_p$ gilt und außerdem:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Ein Spezialfall der Hölder'schen Ungleichung (mit $p = q = 2$) ist die **Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung**:

$$\int f \cdot g \, d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < +\infty$$

Abschließend kann man feststellen, dass $(L_p, \|.\|_p)$ ein Banachraum ist, d. h. dass jede Cauchyfolge konvergiert.

10 Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation

Die **Ableitung** einer Lebesgue-Stieltjes-Maßfunktion ν bezüglich des Lebesgue-Maßes λ ist definiert als:

$$D\nu(x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\nu(C(x,\varepsilon))}{\lambda(C(x,\varepsilon))} \qquad \text{mit } C(x,\varepsilon) := \prod_{i=1}^{m} (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$$

Ist ν eine Lebesgue-Stieltjes-Maßfunktion mit der Lebesgue-Zerlegung $\nu = \nu_1 + \nu_2$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ, dann gilt:

$$\exists\, D\nu(x) \quad \lambda\text{-fast überall}\ , \qquad D\nu(x) = \frac{d\nu_1}{d\lambda}$$

Für allgemeine Lebesgue-Stieltjes-Maße gilt das zwar nicht notwendigerweise, für die Zwecke der Vorlesung genügt allerdings folgende **Berechnungsmethode** von $f = \frac{d\mu_G}{d\mu_F}$:

$$\mu_G \ll \mu_F \iff \begin{cases} \bullet \text{ Sprungstellen von } G \text{ sind auch Sprungstellen von } F \\ \bullet\ G'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad F'(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{G(x)-G(x^-)}{F(x)-F(x^-)} = \frac{\mu_G(\{x\})}{\mu_F(\{x\})} & \text{falls } \mu_F(\{x\}) > 0 \\ \frac{G'(x)}{F'(x)} & \text{falls } \exists\, F'(x),\, G'(x) \text{ und } F'(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

11 Unendlichdimensionale Produkträume

Ist I eine beliebige Indexmenge und $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Mengen, so nennt man $\prod_{i\in I} \Omega_i = \{f : I \to \bigcup \Omega_i \mid f(i) \in \Omega_i\}$ das **Produkt** der Ω_i.
Sind nun $(\Omega_i, \mathcal{S}_i)$ lauter Messräume, so bildet das System

$$\mathcal{L}_i := \left\{ A \times \prod_{i\in E^C} \Omega_i \;\middle|\; E \subseteq I,\ |E| < \infty,\ A \in \bigotimes_{i\in E} \mathcal{S}_i \right\}$$

eine Algebra auf $\prod_{i\in I} \Omega_i$. Der durch diese Algebra erzeugt σ-Ring heißt **Produkt** der σ-Ringe $\mathcal{S}_i$ und wird mit $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{S}_i$ bezeichnet.

Mengen der Gestalt $A \times \prod_{i\in E^C} \Omega_i$ (mit $A \subseteq \prod_{i\in E} \Omega_i$, $|E| < \infty$) nennt man **Zylinder**. Ist $A \in \bigotimes_{i\in E} \mathcal{S}_i$, so spricht man von **messbaren Zylindern**.
Ein Zylinder der Form $A \times \prod_{i\in E^C} \Omega_i$ mit $A = \prod_{i\in E} A_i$ wird **Pfeiler** genannt.
A ist die **Basis** des Pfeilers bzw. Zylinders.

Das System der messbaren Pfeiler bildet auf $\prod_{i\in I} \Omega_i$ einen Semiring, dessen erzeugter σ-Ring mit $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{S}_i$ übereinstimmt.

Ist $(\Omega_i, \mathcal{S}_i, P_i)$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsräumen, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{S}_i)$, sodass gilt:

$$P\left(\prod_{i\in E} A_i \times \prod_{i\in E^C} \Omega_i\right) = \prod_{i\in E} P_i(A_i)$$

Der **Existenzsatz von Kolmogorov** besagt schließlich, dass für eine beliebige Indexmenge I und eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\left\{ P_E \;\middle|\; E \subseteq I,\ |E| < \infty,\ P_E \text{ ist Wahrsch.-Verteilung auf } \left(\mathbb{R}^E, \bigotimes_E \mathcal{B}\right)\right\}$$

mit der Verträglichkeitsbedingung

$$E_1 \subseteq E_2 \ : \quad P_{E_1}(A) = P_{E_2}(A') \qquad \text{mit } A' = A \times \mathbb{R}^{E_2 \setminus E_1} \quad \forall\, A \in \bigotimes_{E_1} \mathcal{B}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $(\mathbb{R}^I, \bigotimes_I \mathcal{B})$ existiert, sodass gilt:

$$P\left(A \times \prod_{I\setminus E} \mathbb{R}\right) = P_E(A) \qquad \forall\, A \in \bigotimes_E \mathcal{B},\ E \subseteq I,\ |E| < \infty$$

Index