Evolutionsstrategien

Eine Zusammenfassung von Bernhard Kabelka
zur Vorlesung von Prof. Länger im SS 2003

Version 1.0, 16. März 2004

Es sei ausdrücklich betont, dass

(1) dieses Essay ohne das Wissen und die Mitarbeit von Prof. Länger entstanden ist,

(2) trotz großer Anstrengungen seitens des Autors, eine möglichst fehlerfreie und vollständige Zusammenfassung zu liefern, sich Fehler eingeschlichen haben könnten (sollte jemand einen Fehler entdecken, so bittet der Autor um Benachrichtigung, vorzugsweise per eMail an bernhard@kabelka.net),

(3) die Lektüre dieser Zusammenfassung keinesfalls den persönlichen Besuch der Vorlesung bzw. das Studium des Skriptums ersetzen, sondern bestenfalls ergänzen kann.

Die aktuelle Version dieser Datei ist erhältlich unter:
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/nawi/download/evstrat.pdf`
`http://fsmat.at/~bkabelka/math/nawi/download/evstrat.ps.gz`

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Grundlagen **1**

2 Nash-Gleichgewichte **1**

3 Evolutionsstabilität **3**

4 Das Falken-Tauben-Modell **3**

5 Trägermuster von ESS **4**

6 Anzahl von ESS **5**

7 Spieldynamische Gleichungen **5**

7.1 Spieldynamische Differenzengleichung 5

7.2 Spieldynamische Differentialgleichung 5

8 Kooperation von Spielern **6**

9 Asymmetrische Spiele **6**

9.1 Nash-Gleichgewichte 6

9.2 Evolutionsstabilität 6

9.3 „Kampf der Geschlechter“ 7

Einleitung

Im Tierreich kommt es oft zu Kämpfen zwischen zwei Individuen derselben Gattung (um ein Revier, ein Weibchen, etc.). Jedoch treten nur sehr selten sogenannte „**Beschädigungskämpfe**“ (d. h. „richtige“ Kämpfe, bei denen dem Verlierer üblicherweise Verletzungen zugefügt werden), sondern vielmehr sogenannte „**Kommentkämpfe**“ (d. h. ritualisierte Kämpfe praktisch ohne Verletzungsgefahr) auf. Mit Hilfe der Spieltheorie kann die Frage nach dem Warum beantwortet werden.

1 Grundlagen

Bei einem Spiel gebe es n sogenannte **„reine“ Strategien** $E_1, E_2, \ldots, E_n$, die von den Spielern eingesetzt werden können. Bezeichne außerdem a_{ij} die mittlere Auszahlung an einen E_i-Spieler beim Spiel gegen einen E_j-Spieler, so ist die **Auszahlungsmatrix** A gegeben durch

$$A = (a_{ij})_{i,j\,=\,1,2,\ldots,n}$$

Gemischte Strategien $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ sind nun Strategien, bei denen E_1 mit Wahrscheinlichkeit p_1, E_2 mit Wahrscheinlichkeit p_2, …, E_n mit Wahrscheinlichkeit p_n gespielt werden. Das macht natürlich nur dann Sinn, wenn $\mathbf{p} \in S_n$, wobei

$$S_n = \left\{ (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; p_i \geq 0 \quad \forall\, i \;=\; 1, 2, \ldots, n \;\; \wedge \;\; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

das **Strategiensimplex** genannt wird.

Die mittlere Auszahlung an einen **p**-Spieler beim Spiel gegen einen **q**-Spieler ist dann gegeben durch:

$$\sum_{i,j} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j = \mathbf{p} \cdot A \cdot \mathbf{q}^T$$

2 Nash-Gleichgewichte

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times b}$ eine Auszahlungsmatrix, so heißt $\mathbf{p} \in S_n$ ein **spieltheoretisches Gleichgewicht** oder **Nash-Gleichgewicht** (bezüglich A), wenn $\mathbf{p}$ eine beste Antwort auf sich selbst ist, d. h.

$$\mathbf{p} \cdot A \cdot \mathbf{p}^T \geq \mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{p}^T \qquad \forall\, \mathbf{x} \in S_n$$

Weiters bezeichne $N(A)$ die Menge der Nash-Gleichgewichte zur Auszahlungsmatrix A.

Es gilt: $\mathbf{p} \in N(A) \iff \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}: \quad \mathbf{p}A\mathbf{p}^T \geq \mathbf{e}_i A\mathbf{p}^T$.

Sei $N := \{1, 2, \ldots, n\}$. Es bezeichne

$$\operatorname{supp} x := \{i \in N \mid x_i \neq 0\}$$

den **Träger** von $\mathbf{x} \in S_n$ und

$$\mathcal{J}(x) := \left\{ i \in N \;\middle|\; \mathbf{e}_i A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T \right\}$$

die **J-Menge** von $\mathbf{x}$.

Weiters sei für alle $I \subseteq N$ definiert

$$\begin{aligned} S(I) &:= \{\mathbf{p} \in S_n \mid \operatorname{supp} \mathbf{p} = I\} \\ N_I(A) &:= N(A) \cap S(I) \end{aligned}$$

Es gilt dann für $\mathbf{p} \in N(A)$

$$\operatorname{supp} \mathbf{p} \subseteq \mathcal{J}(\mathbf{p})$$

Im Folgenden sei $\emptyset \neq I \subseteq N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Weiters gilt folgendes Kriterium für Nash-Gleichgewichte:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \in N_I(A) \quad \iff \quad & \mathbf{p} \in S(I) \;\; \wedge \;\; \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ & \text{(i)} \;\; \mathbf{e}_i A\mathbf{p}^T = c \qquad \forall\, i \in I \\ & \text{(ii)} \;\; \mathbf{e}_i A\mathbf{p}^T \leq c \qquad \forall\, i \in N \backslash I \end{aligned}$$

Daraus lässt sich folgende Berechnungsmethode für die Nash-Gleichgewichte mit Träger I herleiten:

(1) Man bestimme die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} a_{ij} \cdot p_j &= c \qquad \forall\, i \in I \\ \sum_{j \in I} p_j &= 1 \end{aligned}$$

(2) Für alle Lösungen überprüefe man die Bedingungen

  (a) $p_j > 0 \qquad \forall j \in I$

  (b) $\sum_{j \in I} a_{ij} \cdot p_j \leq c \qquad \forall\, i \in N \backslash I$

Schließlich kann man noch zeigen, dass sich die Menge der Nash-Gleichgewichte nicht ändert, wenn man zu jedem Element in einer fixen Spalte der Auszahlungsmatrix dieselbe Zahl addiert bzw. wenn man die gesamte Auszahlungsmatrix mit einer positiven Konstanten multipliziert.

3 Evolutionsstabilität

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times b}$ eine Auszahlungsmatrix, so heißt $\mathbf{p} \in S_n$ eine **evolutionsstabile Strategie (ESS)** bezüglich A, wenn gilt

(1) $\mathbf{p} \in N(A)$

(2) $\forall\, \mathbf{q} \in S_n \backslash \{\mathbf{p}\}$ mit $\mathbf{q} A \mathbf{p}^T = \mathbf{p} A \mathbf{p}^T$ gilt: $\mathbf{p} A \mathbf{q}^T > \mathbf{q} A \mathbf{q}^T$.

Weiters bezeichne $E(A)$ die Menge der evolutionsstabilen Strategien bezüglich der Auszahlungsmatrix A.

Ein $\mathbf{p} \in S_n$ ist eine ESS genau dann, wenn für alle $\mathbf{q} \in S_n \backslash \{\mathbf{p}\}$ gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta \in (0, \varepsilon) : \ \mathbf{p} A \left((1-\delta)\mathbf{p} + \delta \mathbf{q}\right)^T > \mathbf{q} A \left((1-\delta)\mathbf{p} + \delta \mathbf{q}\right)^T$$

Es gilt für $\mathbf{p} \in N(A)$ und $\mathbf{q} \in E(A)$ mit $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$

$$\operatorname{supp} \mathbf{p} \nsubseteq \mathcal{J}(\mathbf{q})$$

und damit auch

$$\operatorname{supp} \mathbf{p} \nsubseteq \operatorname{supp} \mathbf{q}$$

Daher gibt es zu jedem Träger I höchstens eine ESS.

Kennt man die Nash-Gleichgewichte zu einer Auszahlungsmatrix A, so kann man mit Hilfe des folgenden Satzes überprüfen, ob diese auch evolutionsstabil sind. Es gilt nämlich: $\mathbf{p} \in N(A)$ ist genau dann eine evolutionsstabile Strategie, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

(1) $\operatorname{supp} \mathbf{x} \subseteq \mathcal{J}(\mathbf{p})$

(2) $x_i \geq 0 \ \forall\, i \in \mathcal{J}(\mathbf{p}) \backslash \operatorname{supp} \mathbf{p}$

(3) $\sum_{i=1}^n x_i = 0$

gilt: $\mathbf{x} A \mathbf{x}^T < 0$.

Auch hier gilt wieder, dass sich, wenn man zu jedem Element in einer fixen Spalte der Auszahlungsmatrix dieselbe Zahl addiert bzw. wenn man die gesamte Auszahlungsmatrix mit einer positiven Konstanten multipliziert, die Menge der ESS nicht ändert.

4 Das Falken-Tauben-Modell

In diesem Modell stehen die „Falken“ für den Beschädigungskampf, während die „Tauben“ den Kommentkampf symbolisieren. Treffen ein Falke und eine Taube aufeinander, so räumt die Taube ohne zu kämpfen das Feld; treffen zwei

Falken bzw. zwei Tauben aufeinander, so kommt es zu einem Beschädigungs- bzw. einem Kommentkampf, den genau einer der beiden Kontrahenten gewinnt (wobei die Gewinnwahrscheinlichkeit für beide Parteien $\frac{1}{2}$ betrage). Der Sieger des Kampfes erhält das umkämpfte Territorium o. Ä. vom Wert W, der Verlierer geht leer aus (wobei er im Fall eines Beschädigungskampfes noch Verletzungen erleidet, die im die Kosten K verursachen).

Sei $0 < W < K$. Dann erhält man die **Auszahlungsmatrix**

$$A = \begin{pmatrix} \frac{W-K}{2} & W \\ 0 & \frac{W}{2} \end{pmatrix}$$

wobei E_1 einen Falken symbolisiere und E_2 eine Taube.

Man erhält so das (einzige) Nash-Gleichgewicht $\mathbf{p} = \left(\frac{W}{K} \ , \ 1 - \frac{W}{K} \right)$. Dieses ist auch eine evolutionsstabile Strategie.

5 Trägermuster von ESS

Wie schon erwähnt, gibt es zu jedem $I \subseteq N$ höchstens ein $\mathbf{p} \in E(A)$ mit $\operatorname{supp} \mathbf{p} = I$.

Man nennt nun die Menge

$$M(A) := \{\operatorname{supp} \mathbf{p} \mid \mathbf{p} \in E(A)\}$$

ein **Muster** der Auszahlungsmatrix A.

Dieser Begriff tritt auch bei speziellen Halbordnungen auf: Ein **Muster** ist eine beliebige Antikette von $(\mathcal{P}(N), \subseteq)$ (wobei eine **Antikette** eine Menge von Elementen einer Halbordnung, die alle paarweise unvergleichbar sind, ist).

Ein derartiges Muster M heißt **erreichbar**, wenn es eine Auszahlungsmatrix A gibt, sodass $M(A) = M$ ist.

Zwei Muster M_1 und M_2 heißen **äquivalent**, wenn es eine Permutation π gibt, sodass $M_1 = \{\pi(A) \mid A \in M_2\}$ ist.

Schließlich nennt man ein Muster **maximal erreichbar**, wenn es erreichbar ist und in keinem anderen erreichbaren Muster echt enthalten ist.

Nun stellt sich natürlich die Frage nach der Konstruktion der erreichbaren Muster. Dazu kann man folgenden Satz verwenden:
Sei G ein schlichter, ungerichteter Graph mit der Knotenmenge $N = \{1, \ldots, n\}$. Dann ist die Menge der Knotenmengen sämtlicher maximaler vollständiger Teilgraphen ein erreichbares Muster.

Leider bedeutet das natürlich nicht, das man auf diesem Weg alle erreichbaren Muster erhält. So sind beispielsweise für den Fall $n = 5$ noch nicht alle erreichbaren Muster bekannt.

Es sind aber nicht alle Muster erreichbar: Ist M ein Muster, $i, j, k \in N$ (paarweise verschieden) und $\{i, j\}, \{j, k\}, \{k, i\} \in M$, so ist M nicht erreichbar.

6 Anzahl von ESS

Gemäß dem **Sperner'schen Lemma** gilt für eine Antikette A in $(\mathcal{P}(N), \subseteq)$:

$$|A| \leq \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$$

Daher gilt für eine Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$|E(A)| \leq \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix} \sim \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

7 Spieldynamische Gleichungen

7.1 Spieldynamische Differenzengleichung

Bezeichne $x_{i,k}$ die relative Häufigkeit, mit der die i-te reine Strategie zum Zeitpunkt k gespielt wird. Dann gilt:

$$x_{i,k+1} = x_{i,k} + x_{i,k} \cdot \left(\mathbf{e}_i A \mathbf{x}_k^T - \mathbf{x}_k A \mathbf{x}_k^T \right)$$

Beim Falken-Tauben-Modell liefert die Anwendung der Gleichung für $x_{1,k}$ durch Linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $\frac{W}{K}$:

$$x_{1,k} \approx \frac{W}{K} + \underbrace{\left(1 - \frac{W}{2}\left(1 - \frac{W}{K}\right)\right)^k \cdot \left(x_{1,0} - \frac{W}{K}\right)}_{\to 0 \quad \text{falls } \left|1 - \frac{W}{2}\left(1-\frac{W}{K}\right)\right| < 1}$$

falls $x_{0,1} \approx \frac{W}{K}$ und $\left|1 - \frac{W}{2}\left(1 - \frac{W}{K}\right)\right| < 1 \iff \frac{W}{2}\left(1 - \frac{W}{K}\right) < 2$

7.2 Spieldynamische Differentialgleichung

Bezeichne $x_i(t)$ die relative Häufigkeit, mit der die i-te reine Strategie zum Zeitpunkt $t \geq 0$ gespielt wird. Dann gilt:

$$\dot{x}_i = (\mathbf{e}_i - \mathbf{x}(t)) \cdot A \cdot \mathbf{x}(t)^T \cdot x_i(t) \tag{1}$$

Beim Falken-Tauben-Modell liefert die Anwendung der Gleichung für $x_1(t)$ (wieder durch Linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $\frac{W}{K}$):

$$x_1(t) \approx \frac{W}{K} + \underbrace{\exp\left(-\frac{W}{2}\left(1 - \frac{W}{K}\right)t\right) \cdot \left(x_1(0) - \frac{W}{K}\right)}_{\to 0 \quad \text{(monoton)}}$$

falls nur $x_1(0) \approx \frac{W}{K}$.

Ist $\mathbf{p} \in E(A)$, so ist $\mathbf{p}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt von (1), und es gibt eine Umgebung U von $\mathbf{p}$, sodass jede ganz in U verlaufende Lösung von (1) gegen $\mathbf{p}$ strebt.
Ist sogar $\mathbf{p} \in E(A) \cap {S_n}^\circ$, so strebt jede ganz in ${S_n}^\circ$ verlaufende Lösung von (1) gegen $\mathbf{p}$.

8 Kooperation von Spielern

Hier geht es um das klassische **Gefangendilemma**: Zwei Gefangen, die sich in getrennten Zellen befinden, sollen ein gemeinsam verübte Tat gestehen. Wenn beide gestehen, werden sie zu sieben Jahren Haft verurteilt; gesteht nur einer, so wird dieser als Kronzeuge auf freien Fuß gestetzt, während der andere zu zehn Jahren Haft verurteilt wird; gesteht keiner der beiden, so bleiben sie ein Jahr in Untersuchungshaft. Das ergibt (mit E_1 = „Gestehen“ und E_2 = „Nicht gestehen“) die Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$$

Unabhängig von der Strategie des anderen hat man also die größte Auszahlung bei Spiel von G. Allerdings hätten beide Spieler (bei Kooperation) N wählen können, was für beide Spieler besser gewesen wäre.

9 Asymmetrische Spiele

Hier hat man zwei Populationen, die beide unterschiedliche Strategien haben: Die erste Population kann zwischen den (reinen) Strategien E_1, E_2, ..., E_n wählen, während der zweiten Population die (reinen) Strategien F_1, F_2, ..., F_m zur Auswahl stehen. Es bezeichne b_{ij} die mittlere Auszahlung an einen E_i-Spieler beim Spiel gegen einen F_j-Spieler, und c_{ji} die mittlere Auszahlung an einen F_j-Spieler beim Spiel gegen einen E_i-Spieler ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$).

9.1 Nash-Gleichgewichte

Das Paar $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in S_n \times S_m$ heißt **Nash-Gleichgewicht** (bezüglich B und C), wenn gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{p}B\mathbf{q} &\geq \mathbf{x}B\mathbf{q} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in S_n \\ \mathbf{q}C\mathbf{p} &\geq \mathbf{y}C\mathbf{p} \qquad \forall\, \mathbf{y} \in S_n \end{aligned}$$

Es gelten (sehr) ähnliche Aussagen wie im symmetrischen Fall, die hier nicht ausführlich erläutert werden sollen.

9.2 Evolutionsstabilität

Der Begriff der **Evolutionsstailität** lässt sich im asymmetrischen Fall nicht sinnvoll definieren: Entweder ergibt sich $E(B, C) \subseteq \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \times \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, oder überhaupt $E(B, C) = \emptyset$.

9.3 „Kampf der Geschlechter“

Hierbei geht es um das Engagement bei der Aufzucht der Nachkommen:

- Männchen sind entweder **flatterhaft** ($E_1 = F$), d. h. sie kümmern sich nicht um den Nachwuchs, oder **treu** ($E_2 = T$).
- Weibchen sind entweder **spröde** ($F_1 = S$), d. h. sie bestehen auf langer Verlobungszeit, oder **willig** ($F_2 = W$).

Treffen F uns S aufeinander, so entstehen keine Nachkommen, in allen anderen Fällen schon (Gewinn pro Partner: G). Die Brutpflege verursacht Kosten von $2K$ (wird von einem T-Männchen zur Hälfte getragen), und eine lange Verlobungszeit kostet jeden Partner S. Das ergibt die beiden Auszahlungsmatrizen

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 0 & G \\ G-K-V & G-K \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & G-K-V \\ G-2K & G-K \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man erhält für $K + V < G < 2K$ $(G, K, V > 0)$ folgendes Nash-Gleichgewicht:

$$N(B,C) = \left\{ \left(\left(\frac{V}{V+2K-G} \, , \, \frac{2K-G}{V+2K-G} \right) \, , \, \left(\frac{K}{G-V} \, , \, \frac{G-K-V}{G-V} \right) \right) \right\}$$

Index

Antikette, 4
asymmetrisches Spiel, 6
Auszahlungsmatrix, 1

Beschädigungskampf, 1

Falken-Tauben-Modell, 3

Gefangendilemma, 6
Gleichgewicht, spieltheoretisches, 1

J-Menge, 2

Kampf der Geschlechter, 7
Kommentkampf, 1

Muster, 4
- äquivalente, 4
- erreichbares, 4
- maximal erreichbares, 4

Nash-Gleichgewicht, 1, 6

Sperner'sches Lemma, 5
spieldynamische Gleichung, 5
Strategie
- evolutionsstabile, 3
- gemischte, 1
- reine, 1

Strategiensimplex, 1

Träger, 2